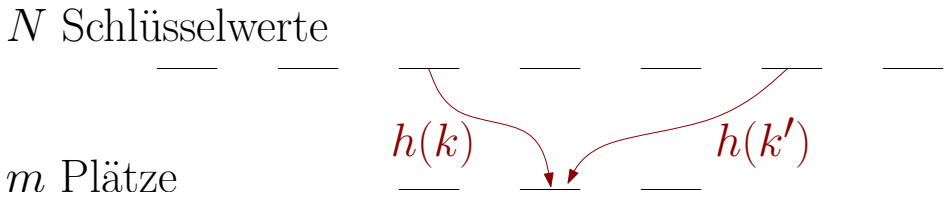
Hashing

- $U = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ mit $N \in \mathcal{N}$ ist o.B.d.A. das Universum der möglichen Schlüsselwerte
- Speichern des Elements x in Feld der Größe N an Stelle Schlüssel(x)
  - ist effizient (Einfügen, Löschen, Suchen in $O(1)$)
  - benötigt aber oft zu viel Speicherplatz
- Idee von Hashing
  - Definiere *Hashfunktion* $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit $m < N \in \mathcal{N}$
  - Annahme: Hashfunktion kann in $O(1)$ evaluiert werden
  - *Hashtabelle* = Feld T der Größe m
  - Speichere Element x an Stelle h(Schlüssel(x))

Schubfachprinzip

- Problem: wir möchten $N > m$ verwenden



- Schubfachprinzip
  - Es gibt Schlüssel $k \neq k'$, so dass $h(k) = h(k')$: *Hashkonflikt*
  - Stärker: es gibt einen Platz $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, so dass $h(k) = i$ für mindestens $\lceil \frac{N}{m} \rceil$ Schlüssel k

Hashing mit Verkettung

- Mögliche Art, Hashkonflikte zu lösen
- Statt Feld von Elementen wird Feld von Listen von Elementen verwendet
- Worst-Case Analyse: T enthält n Elemente
  - Suche: Suche Schlüssel k in Liste $T[h(k)]$: $O(n)$
  - Einfügen: Füge Element x am Anfang von $T[h(\text{Schlüssel}(k))]$ ein: $O(1)$
  - Löschen: Lösche Element x aus Liste $T[h(k)]$: Mit doppelt verlinkten Listen: Laufzeit Suche + $O(1)$

Worst-Case Analyse

Im schlechtesten Fall sind alle n Elemente in einer Liste gespeichert, und die Laufzeit der Suche ist $\Theta(n)$ – nicht besser als bei einer Liste.

Average-Case Analyse

Laufzeit hängt davon ab, wie gut die Hashfunktion die Schlüssel verteilt.

Einfaches gleichverteiltes Hashing

Annahme Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Element in einen der m Plätze hasht, ist gleichverteilt

- $n_j = |T[j]|$ für $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$
- Erwartungswert $E\left[n_j\right] = \frac{n}{m} := \alpha$
- α nennen wir *Belegungsfaktor*

Satz In einer Hash-Tabelle, in der Konflikte durch Verkettung gelöst werden, und unter Verwendung des einfachen gleichverteilten Hashings, benötigt eine Suche durchschnittlich Zeit $\Theta(1 + \alpha)$.

Beweis In Vorlesung besprochen.

Einfaches gleichverteiltes Hashing

Problem:

- Wir machen Annahmen über die Eingabe, die nicht immer realistisch sind
- Für eine gegebene Hashfunktion können besonders “schwierige” Elemente gewählt werden, die zu hohen Laufzeiten führen

Universelles Hashing

Idee Hashfunktion wird zufällig und unabhängig von Schlüsselwerten gewählt

- Das heisst, das mehrfache Ausführen mit denselben Elementen führt zu unterschiedlichen Hashtabellen
- Wir nehmen den Zufall nun selbst in die Hand

Def. Sei $\mathcal{H}$ eine endliche Menge an Hashfunktionen von U nach $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. $\mathcal{H}$ ist *universell* falls für $k_i, k_j \in U$ mit $k_i \neq k_j$ die Anzahl der Hashfunktionen $h \in \mathcal{H}$ mit $h(k_i) = h(k_j)$ höchstens $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$ ist.

Universelles Hashing

Satz Sei h eine zufällig gewählte Hashfunktion aus einer Menge $\mathcal{H}$ an universellen Hashfunktionen. Sei T eine Hashtabelle der Größe m, in der Konflikte mit Verkettung gelöst werden, und in die n Schlüssel mit Hilfe von h eingefügt wurden. Der Erwartungswert der Länge der Liste $T[h(k)]$, die nach Schlüssel k durchsucht wird, ist höchstens $1 + \alpha$.

Kor. Universelles Hashing mit Verkettung zur Lösung von Konflikten erlaubt es, in $O(1 + \alpha)$ erwarteter Zeit in einer Hashtabelle der Größe m, die n Elemente enthält, zu suchen.

$\Rightarrow$ Für $m = O(n)$ brauchen die Operationen Suche, Einfügen und Löschen durchschnittlich Zeit $O(1)$.

Universelles Hashing

Wie wird universelles Hashing implementiert?

- Klasse UniversellesHashing
- Zufallsgenerator im Konstruktor erzeugt eine Hashfunktion $h \in \mathcal{H}$
- Destuktor löscht h
- So lange eine Instanz existiert, wird die Hashfunktion h nicht verändert

Universelles Hashing

Zu zeigen: es gibt Mengen von universellen Hashfunktionen

Bsp.

- m ist Primzahl, z.B. 257
- $x \in U$ kann eindeutig als $r+1$-Tupel $x = \langle x_0, x_1, \ldots, x_r \rangle$ mit $r > 0$ und $0 \leq x_i < m$ geschrieben werden, z.B. bitweise geschrieben
- Hashfunktion: Für jedes $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_r \rangle \in \{0, 1, \ldots, m-1\}^{r+1}$ definieren wir die Hashfunktion $h_a : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$$h_a(x) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i x_i \right) \mod m$$

Universelles Hashing

Bsp. Fortsetzung:

Lemma Die Menge $\mathcal{H} = \left\{ h_a | a \in \{0, \ldots, m-1\}^{r+1} \right\}$ ist universell.

Beweis

- Betrachte $x, y \in U$ mit $x \neq y$ und o.B.d.A. $x_0 \neq y_0$
- Es ist $h_a(x) = h_a(y)$ falls
  $a_0 \underbrace{(x_0 - y_0)}_{\neq 0} = \left(\sum_{i=1}^{r} a_i (x_i - y_i)\right) \mod m$
- Sind $a_1, \ldots, a_r$ fest, so gibt es nur eine Wahl für a_0 da m prim ist
- Es gibt m^r Möglichkeiten, um $a_1, \ldots, a_r$ zu wählen
- Es gibt also $m^r \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m} = \frac{m^{r+1}}{m}$ Funktionen in $\mathcal{H}$, so dass $h_a(x) = h_a(y)$