1. (12 Punkte)
   In der Vorlesung haben wir $T_P(A)$ als die "Laufzeit" von Algorithmus P bei Eingabe A definiert, wobei allerdings das darunterliegende Rechenmodell und die Kosten der einzelnen Operationen erste festgelegt werden müssen. In dieser Aufgabe betrachten wir Sortieralgorithmen in einem (recht üblichen) Rechenmodell, in dem nur Schlüsselvergleiche Zeit kosten, und zwar jeder Schlüsselvergleich genau eine Zeiteinheit. $T_P(A)$ ist dann also die Anzahl der Schlüsselvergleiche, die Algorithmus P bei Eingabe A insgesamt durchführt. In der Vorlesung haben wir zwei Sortieralgorithmen, *IS* (Insertion Sort) und *QS* (Quicksort) besprochen.

   (a) Was sind $T_{IS}([23, 11, 8, 4, 15])$ und $T_{QS}([23, 11, 8, 4, 15])$.

   (b) Geben Sie ein Feld $A[]$ mit 5 Schlüsseln an, für das gilt $T_{IS}(A) > T_{QS}(A)$.

   (c) Geben Sie ein Feld $B[]$ mit 5 Schlüsseln an, für das gilt $T_{IS}(B) < T_{QS}(B)$.

   (d) Geben Sie ein Feld $A[]$ mit 5 Schlüsseln an, für das $T_{IS}(A)$ möglichst groß ist. Können Sie Maximalität beweisen?

   (e) Geben Sie ein Feld $A[]$ mit 5 Schlüsseln an, für das $T_{QS}(A)$ möglichst groß ist. Können Sie Maximalität beweisen?

   (f) Lösen Sie die beiden vorherigen Teilaufgaben für den allgemeinen Fall, also für eine beliebige Anzahl n von Schlüsseln.

2. (8 Punkte)
   In der Vorlesung haben wir für Funktionen vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die Relationen $\leq_{\text{fü}}$, $<_{\text{fü}}$, $\geq_{\text{fü}}$ und $>_{\text{fü}}$ definiert. In Analogie zur Notation $\not\leq$ bei Zahlen, definieren wir für Funktionen $\not\leq_{\text{fü}}$ als $f \not\leq_{\text{fü}} g$ bedeutet $\neg(f \leq_{\text{fü}} g)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\leq_{\text{fü}}$ eine transitive Relation ist.

   (b) Bedeutet $\not\leq_{\text{fü}}$ das Gleiche wie $>_{\text{fü}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (12 Punkte)
   Es sei $f \in$ FÜP ein Polynom vom Grad genau k. Beweise:

   (a) $f(n) = \Theta(n^k)$.

   (b) Für $\ell > k$ gilt $f(n) \in o(n^\ell)$.

   (c) Für $\ell < k$ gilt $f(n) \in \omega(n^\ell)$.

4. (12 Punkte)
   Beweise die folgenden Aussagen für beliebige Funktionen in FÜP:

   (a) $\left(\exists c > 0 \text{ mit } \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c\right) \Longrightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$.

   (b) $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0 \Longrightarrow f(n) \in o(g(n))$.

   (c) $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \infty \Longrightarrow f(n) \in \omega(g(n))$.

5. (16 Punkte)
   Ordnen Sie die folgenden 9 Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum.

   $$n/10 \quad n^{5/3} \quad 3^n \quad n\log n \quad n^{1-\varepsilon} \quad n/\log n \quad n^{5/3}\log n \quad (5/3)^n \quad n\cdot 2^{\sqrt{\log n}}$$

   Dabei ist $0 < \varepsilon < 1$ eine beliebige feste Zahl.

   Bitte geben Sie Beweise für Ihre Anordnung an.