$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Satz (Myhill – Nerode):

L DEA-Sprache $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Konsequenz 3: (DEA Minimierung) Sei M ein DEA. Man kann effektiv einen DEA M' konstruieren, sodass L(M')=L(M) und die Anzahl der Zustände von M ist minimal. Diese Konstruktion braucht nur Zeit polynomiell in der Beschreibungsgröße von M'.

Beweis: $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$

für $q \in Q$ sei $L_q = \{x \in \Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon)$ für irgendein $f \in F \}$

$\mathcal{F}_L = \{ L_q \mid q \in Q$ **mit q von s erreichbar** $\}$ (plus möglicherweise {})

Idee: Betrachte Übergangsgraphen G_M

1) Eliminiere $q \in Q$, die nicht von s erreichbar von G_M
   Vervollständige G_M, d.h. füge Knoten $\perp$ hinzu und für jedes $(q,a) \in (Q \cup \{\perp\}) \times \Sigma$ ohne Übergangsregel füge Regel (Kante) $(q,a,\perp)$ hinzu.

2) Im neuen Graphen bestimme, für welche Knotenpaare $\{p,q\}$ gilt $L_p = L_q$. ($\Rightarrow$ Äquivalenzrelation auf den Knoten)

3) Aus den Äquivalenzklassen bilde den Minimalautomaten.

Algorithmus für Schritt 2:

Ziel: Berechne $U = \{ \{p,q\} \mid L_p \neq L_q \}$ unterscheidbare Paare
und $N = \{ \{p,q\} \mid L_p = L_q \}$ nicht unterscheidbare Paare

Sei $U_i \subseteq U$ die Menge aller Paare $\{p,q\}$ für die das kürzeste Wort, durch das sich L_p und L_q unterscheiden, Länge i hat. Dann gilt $U = \bigcup_{i \geq 0} U_i$

U_0 := $\{ \{p,q\} \mid p \in F$ und $q \in Q \setminus F \}$
N := $\{ \{p,q\} \mid p,q \in F$ oder $p,q \in Q \setminus F \}$

i := 0
while $U_i \neq \emptyset$ **do**
  $U_{i+1} := \emptyset$
  for each $\{p,q\} \in N$ für das $\exists \{p',q'\} \in U$ and $\exists a \in \Sigma$ mit $(p,a,p') \in \Delta$ und $(q,a,q') \in \Delta$
    do verschiebe $\{p,q\}$ aus N nach U_{i+1}
  i := i+1

return N

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$? Minimiere M und teste, ob es sich dann um den 1-Zustand DEA handelt, der alles akzeptiert.

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$? Minimiere M und teste, ob es sich dann um den 1-Zustand DEA handelt, der nichts akzeptiert.

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$? Minimiere M und M' und teste, ob die beiden sich ergebenden Übergangs-graphen “gleich” (isomorph) sind.

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$? Teste, ob $L \cap L' = L$.
$L \cap L'$ ist auch eine reguläre Sprache.
(siehe nächsten Satz)

9

4.11.2015 9

Abschlussigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: Wenn L und L' DEA-Sprachen sind, dann sind auch folgende Sprachen DEA-Sprachen:

1) das Komplement von L
2) $L \cup L'$ und $L \cap L'$
3) $L \cdot L' = \{ xy \mid x \in L$ und $y \in L' \}$ (Konkatenation)
4) $L^R = \{ x^R \mid x \in L \}$ (Umkehrung)
5) $L^i = \{ x_1 x_2 \cdots x_i \mid x_1, x_2, \cdots, x_i \in L \}$ (für $i \in \mathbb{N}$)
6) $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ (Kleene Stern Operator)

4.11.2015 10

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$

4.11.2015 11

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$

Beweisidee:

Jeder Pfad mit mindestens N Kanten in einem Graphen mit N Knoten hat eine Schleife.

4.11.2015 12

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$

$\neg \big(\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L\big)$

$\Rightarrow \quad \neg$ (L DEA-Sprache)

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$

$\neg \big(\exists\, N \in \mathbb{N}: \forall\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L\big)$

$\Rightarrow \quad \neg$ (L DEA-Sprache)

$\forall\, N \in \mathbb{N}: \exists\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\forall$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\exists\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \notin L$

$\Rightarrow$ L ist **keine** DEA-Sprache

"Spiel" zum Zeigen, dass L keine DEA Sprache

1. Widersacher gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $x \in L$ mit $|x| \geq N$.
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $x = uvw$ vor mit $|uv| \leq N$, $|v| > 0$.
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iw \notin L$.

$\forall\, N \in \mathbb{N}: \exists\, x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\forall$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\exists\, i \in \mathbb{N} : uv^iw \notin L$

$\Rightarrow$ L ist **keine** DEA-Sprache

Beispiel:

"Spiel" zum Zeigen, dass $L = \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ keine DEA Sprache

1. Widersacher gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $x \in L$ mit $|x| \geq N$. $x = a^Nb^N$
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $x = uvw$ vor mit $|uv| \leq N$, $|v| > 0$.

   uv besteht nur aus a's und $v = a^k$ mit $k > 0$
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iw \notin L$.

   z.B. $i = 0$, weil dann $uv^iw = a^{N-k}b^N \notin L$