Formale Spezifikation von Kellerautomaten

Σ	Eingabealphabet
Γ	Kelleralphabet
$€ \in \Gamma$	Kellerboden
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände

Konvention:

$a,b,c,.. \in \Sigma$ $\quad$ $A, B, C,... \in \Gamma$

$u,v,w,.. \in \Sigma^*$ $\quad$ $U, V, W,.. \in \Gamma^*$

$\Delta \subset (Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})) \times \Gamma^* \times Q$ Regeln (endlich)

derz. Zust. — derz. Keller-gipfel — konsumierte Eingabe — neuer Keller-gipfel — neuer Zustand

$(p , A , a , U , q) \in \Delta$ notiert durch

$$p \xrightarrow[A/U]{a} q$$

Konfiguration: $\Gamma^* \times Q \times \Sigma^*$

Kellerinhalt Zustand Eingaberest

Rechenschrittrelation:

$(WA , p , aw) \vdash_M (WU, q , w)$ g.d.w. $(p,A,a,U,q) \in \Delta$
$(WA , p , aw) \vdash_M (WU, q, aw)$ g.d.w. $(p,A,\varepsilon,U,q) \in \Delta$

$A \in \Gamma$, $W,U \in \Gamma^*$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$

Rechenrelation:

$\vdash_M^*$ reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

Startkonfiguration für Eingabe x : $start_x = (€ , s , x)$

Endkonfigurationen: $Fin = \{ (f , W , \varepsilon) \mid W \in \Gamma^* , f \in F \}$
(Akzeptanz durch Endzustand)

$Fin_\varepsilon = \{ (q , \varepsilon , \varepsilon) \mid q \in Q \}$
(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi$ für irgendein $\varphi \in Fin \}$

$L_\varepsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi$ für irgendein $\varphi \in Fin_\varepsilon \}$

Startkonfiguration für Eingabe x : $start_x = (€ , s , x)$

Endkonfigurationen: $Fin = \{ (f , W , \varepsilon) \mid W \in \Gamma^* , f \in F \}$
(Akzeptanz durch Endzustand)

$Fin_\varepsilon = \{ (q , \varepsilon , \varepsilon) \mid q \in Q \}$
(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi$ für irgendein $\varphi \in Fin \}$

$L_\varepsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi$ für irgendein $\varphi \in Fin_\varepsilon \}$

Achtung: Um Wort x zu akzeptieren, muss das gesamte x konsumiert werden.

Satz: $L=L(M)$ **für irgendeinen NKA** M

$\Leftrightarrow$

$L=L_\varepsilon(M')$ **für irgendeinen NKA** M'

“Äquivalenz von Akzeptanz durch Endzustand und Akzeptanz durch leeren Keller.“

Def.: L heißt *NKA-Sprache* (oder *kontextfreie Sprache*), wenn $L=L(M)$ oder $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA M.

Pumping Lemma für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N\in\mathbb{N} : \forall\, z\in L$ mit $|z|\geq N$ $: \exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx|\leq N$ und $|vx|>0$ $: \forall\, i\in\mathbb{N} : uv^iwx^iy\in L$

$\neg\big(\exists\, N\in\mathbb{N} : \forall\, z\in L$ mit $|z|\geq N$ $: \exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx|\leq N$ und $|vx|>0$ $: \forall\, i\in\mathbb{N} : uv^iwx^iy\in L\big)$

$\Rightarrow\ \neg\,($ L NKA-Sprache $)$

$\forall\, N\in\mathbb{N} : \exists\, z\in L$ mit $|z|\geq N$ $: \forall$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx|\leq N$ und $|vx|>0$ $: \exists\, i\in\mathbb{N} : uv^iwx^iy\notin L$

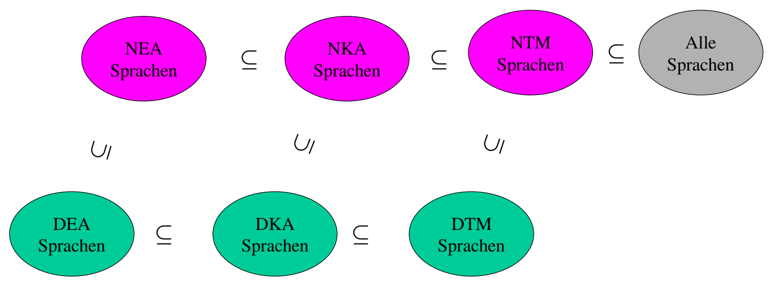
$\Rightarrow$ L ist **keine** NKA-Sprache

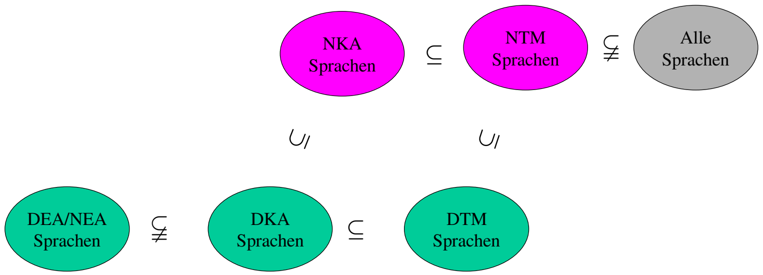
“Spiel” zum Zeigen, dass L keine NKA Sprache

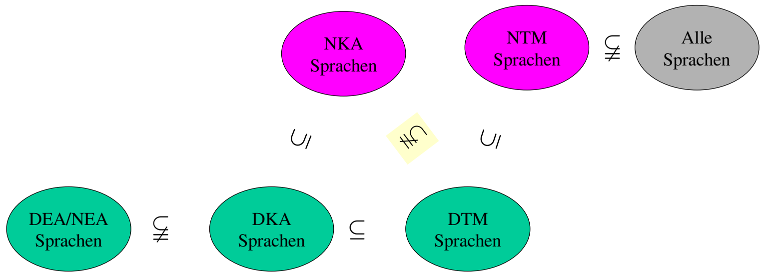
1. Widersacher gibt eine Zahl $N\in\mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $z\in L$ mit $|z|\geq N$.
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $z = uvwxy$ vor mit $|vwx| \leq N$, $|vx|>0$.
4. Ich wähle ein $i\in\mathbb{N}$, sodass $uv^iwx^iy \notin L$.

Bsp: $L_{abc} = \{\, a^nb^nc^n \mid n\in\mathbb{N} \,\}$ ist KEINE NKA-Sprache

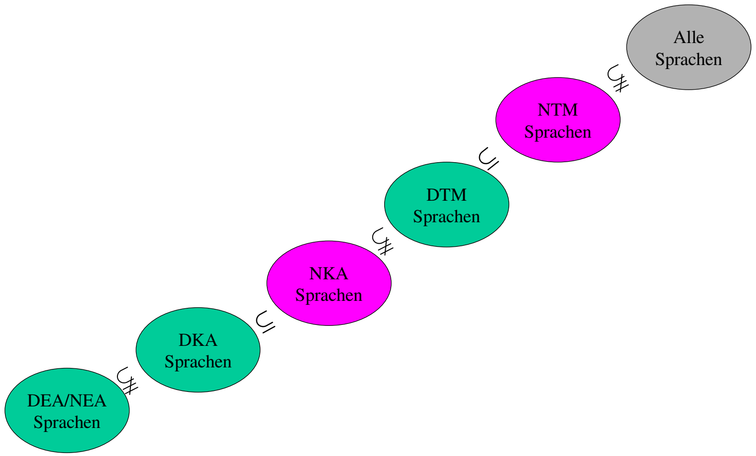
Bew: In 2. wähle $z = a^Nb^Nc^N$
Ganz gleich wie der Widersacher in 3. wählt, vwx enthält keine a's oder keine c's
In 4. wähle dann $i=0$; uwy enhält dann zu viele a's oder zu viele c's







L_{abc} ist nicht NKA-Sprache, aber DTM-Sprache.



Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Beweis von 3): $L = \{ a^k b^k c^m \mid k,m \in \mathbb{N} \}$ ist NKA-Sprache
$L' = \{ a^m b^n c^n \mid m,n \in \mathbb{N} \}$ ist NKA-Sprache

$L \cap L' = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \} = L_{abc}$ ist nicht NKA-Sprache.

Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Beweis von 4): Sei L das Komplement von L_{abc}.

Überlege, dass L eine NKA-Sprache ist.

Aber das Komplement von L ist L_{abc}, und das ist keine NKA-Sprache.

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert, wobei M' nur **einen Zustand** besitzt.

Satz 0: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch gleichzeitigem leerem Keller und Endzustand akzeptiert, bei dem dazu noch alle Regeln in $\Delta' \subset Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \times Q$ eine der folgenden drei Formen haben:

$(p , A , a , \varepsilon , q)$ ("pop the stack")

(p , A , a , B , q) (ändere die Kellerspitze)

(p , A , a , BA , q) ("push B")

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert, wobei M' nur **einen Zustand** besitzt.

Beachte: Man kann M' auch als NKA **ohne Zustand** auffassen.

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert, wobei M' nur **einen Zustand** besitzt.

Beweisidee: Lasse M' den NKA M nicht-deterministisch simulieren

Der Zustand von M wird auf dem Keller von M' gespeichert

Instanz von A auf Keller von M wird realisiert als

(q,A,q') auf Keller von M' mit der Bedeutung:

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Beweisidee: Lasse M' den NKA M nicht-deterministisch simulieren

Der Zustand von M wird auf dem Keller von M' gespeichert

Instanz von A auf Keller von M wird realisiert als

(q,A,q') auf Keller von M' mit der Bedeutung:

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Kellerinhalt von M im Zustand q $A_1\ A_2\ A_3 \cdots A_k$

entspricht

Kellerinhalt von M' $(s,A_1,p_1)\ (p_1,A_2,p_2)\ (p_2,A_3,p_3) \cdots (p_{k-1},A_k,q)$

für geeignete (nicht-deterministisch gewählte) Zustände $p_1,p_2,p_3 \cdots p_{k-1}$

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Kellerinhalt von M im Zustand q $A_1\ A_2\ A_3 \cdots A_k$ entspricht

Kellerinhalt von M' $(s,A_1,p_1)\ (p_1,A_2,p_2)\ (p_2,A_3,p_3) \cdots (p_{k-1},A_k,q)$

für geeignete (nicht-deterministisch gewählte) Zustände $p_1,p_2,p_3 \cdots p_{k-1}$

M (wie in Satz 0) $\Sigma,\ \Gamma,\ €,\ Q,\ s,\ F,\ \Delta$

$M' :\ \Sigma,\ \Gamma' = Q\times\Gamma\times Q,\ €' = (f,€,s),\ Q'=\{s\},\ s,\ F'=\{s\},\ \Delta' \subset Q'\times\Gamma'\times\Sigma^{\leq 1}\times\Gamma'^{\leq 2}\times Q'$

$(q,A,a,B,p) \in \Delta \quad \to \quad (s,(r,A,q),a,(r,B,p),s) \in \Delta'$ für jedes $r \in Q$

$(q,A,a,\varepsilon,p) \in \Delta \quad \to \quad (s,(q,A,p),a,\varepsilon,s) \in \Delta'$ für jedes $r \in Q$

$(q,A,a,AB,p) \in \Delta \quad \to \quad (s,(r,A,q),a,(r,A,t)(t,B,p),s) \in \Delta'$ für jedes $r,t \in Q$

Behauptung: M' akzeptiert genau die gleiche Sprache wie M