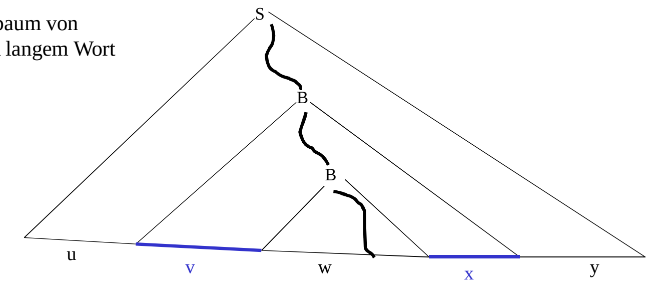
Beweis des Pumping Lemmas für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx|>0$: $\forall\, i \in \mathbb{N}$: $uv^iwx^iy \in L$

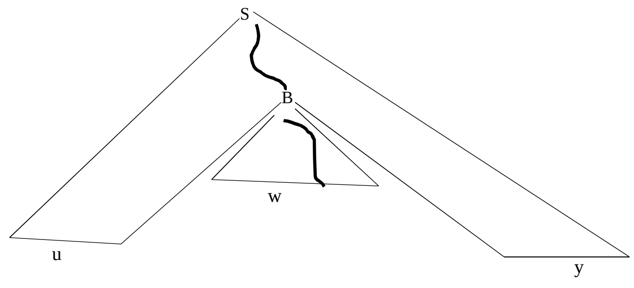
Ableitungsbaum von
hinreichend langem Wort



Beweis des Pumping Lemmas für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx|>0$: $\forall\, i \in \mathbb{N}$: $uv^iwx^iy \in L$

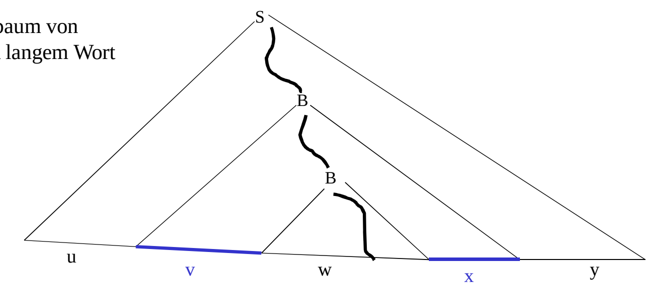


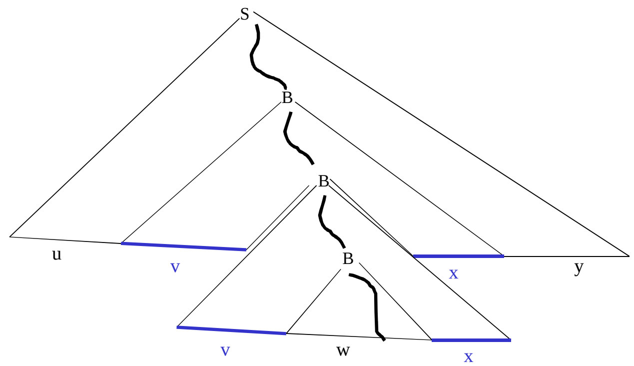
Beweis des Pumping Lemmas für NKA Sprachen:

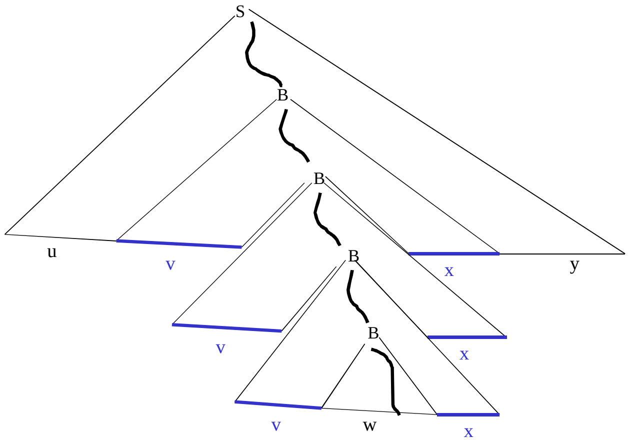
L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $z=uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx|>0$: $\forall\, i \in \mathbb{N}$: $uv^iwx^iy \in L$

Ableitungsbaum von
hinreichend langem Wort







Satz: Jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet ist regulär.

Beweis: $L \subset \{a\}^*$ kontextfrei

Pumpinglemma $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$ mit $|z| \geq N$ $: \exists$ Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$ $: \forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$

da $L \subset \{a\}^*$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$ mit $|z| \geq N$ $: \exists$ Unterteilung $z = \alpha\beta$ mit $0 < |\beta| \leq N$ $: \boxed{\forall i \in \mathbb{N} : \alpha\beta^i \in L}$

Für $0 \leq s < N$, $1 \leq p \leq N$ definiere $j(s,p) = \min\{ j \mid a^s(a^p)^i \in L \text{ for all } i \geq j \}$

$R(s,p) = \{ a^s(a^p)^i \mid i \geq j(s,p) \}$

$= a^{s+p\cdot j(s,p)} (a^p)^*$ (oder leer) (regulär!)

$$L = \underbrace{\{ w \in L : |w| < N \}}_{\text{endlich, also regulär}} \cup \underbrace{\bigcup \{ R(s,p) : 0 \leq s < N, 1 \leq p \leq N \}}_{\text{endliche Vereinigung von regulären Mengen, also regulär}}$$

Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen

Gegeben kfG $G = (\Sigma, V, S, P)$ in Chomsky-Normalform und $x \in \Sigma^*$, entscheide deterministisch, ob $x \in L(G)$.

$x = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$ $\quad x[i:j] = x_i \cdots x_{j-1}$ $\quad V[i:j] = \{ A \in V \mid A \Rightarrow_G^* x[i:j] \}$

Idee: Berechne $V[0:n]$ und teste, ob $S \in V[0:n]$

Gegeben kfG $G = (\Sigma, V, S, P)$ in Chomsky-Normalform und $x \in \Sigma^*$, entscheide deterministisch, ob $x \in L(G)$.

$x = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$ $\quad x[i:j] = x_i \cdots x_{j-1}$ $\quad V[i:j] = \{ A \in V \mid A \Rightarrow_G^* x[i:j] \}$

Idee: Berechne $V[0:n]$ und teste, ob $S \in V[0:n]$

for $0 \leq i < n$ **do** $V[i:i+1] = \{ A \in V \mid A \to x_i \in P \}$

for $2 \leq m \leq n$ **do**
  for $0 \leq i \leq n-m$ **do**
    $V[i:i+m] = \bigcup_{0<j<m} \{ A \in V \mid A \to BC \text{ und } B \in V[i:i+j], C \in V[i+j:i+m] \}$

Laufzeit $O(n^3)$, wenn n groß und G konstant.

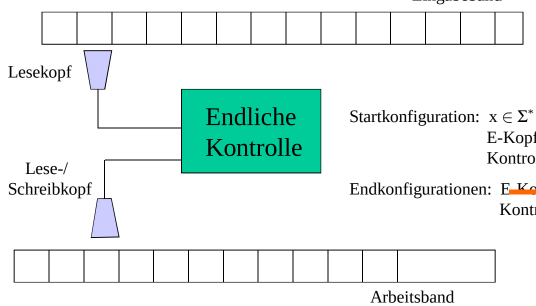
Das Wortproblem für Typ 0 Sprachen

Gegeben allemeine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und $x \in \Sigma^*$, entscheide,

ob $x \in L(G)$.

???????

Turing Maschine



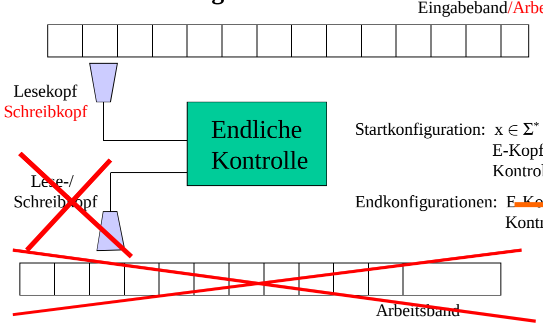
Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf E-Band, nichts auf A-Band
E-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

Endkonfigurationen: ~~E-Kopf ganz rechts~~
Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand | gelesenes E-Symbol | gelesenes A-Symbol → neuer Zustand | E-Kopf nach rechts | schreibe A-Symbol | bewege A-Kopf

Einfache Turing Maschine



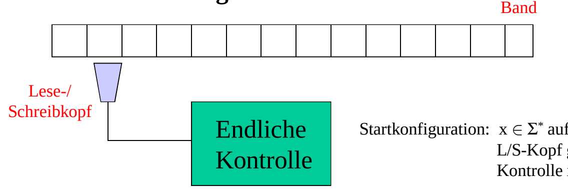
Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf E-Band, ~~nichts auf A-Band~~
E-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

Endkonfigurationen: ~~E-Kopf ganz rechts~~
Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand | gelesenes ~~E-~~Symbol | ~~gelesenes A-Symbol~~ → neuer Zustand | ~~E-Kopf nach rechts~~ | schreibe ~~A-~~Symbol | bewege A-Kopf

Einfache Turing Maschine



Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf Band
L/S-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

Endkonfigurationen: Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand | gelesenes Symbol → neuer Zustand | schreibe Symbol | bewege L/S-Kopf

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Σ	Eingabealphabet
$\Gamma \supset \Sigma$	Bandalphabet
$\# \in \Gamma \setminus \Sigma$	Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände
$\Delta \subset (Q\times\Gamma) \times (Q\times\Gamma\times\{L,B,R\})$	Rechenschrittregeln

derzeitiger Zustand — derzeitig gelesenes Symbol — neuer Zustand — geschriebenes Symbol — Kopfbewegung L = links R = rechts B = bleibe

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Konfigurationsraum für M: $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, q\, A_i\cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1\cdots A_n$
Zustand ist q
S/L-Kopf über A_i

Achtung: nocht nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x\in\Sigma^+$: $init(x) = s\, x$
für $x\in\Sigma^0$: $init(\varepsilon) = s\, \#$

Endkonfigurationen: $\Phi = \Gamma^* F \Gamma^+$

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Konfigurationsraum für M: $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, q\, A_i\cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1\cdots A_n$
Zustand ist q
S/L-Kopf über A_i

Achtung: nocht nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x\in\Sigma^+$: $init(x) = s\, x$
für $x\in\Sigma^0$: $init(\varepsilon) = s\, \#$

Alternative Endkonfigurationen: $\Phi_\varepsilon = \#^* F \#^+$ Am Ende Bandinhalt löschen

Rechenschrittrelation $\vdash_M$ auf K_M

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, p\, A_iA_{i+1}\cdots A_n$
$\vdash_M$ g.d.w $(p,A_i,q,C,B)\in\Delta$
$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, q\, CA_{i+1}\cdots A_n$

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, p\, A_i\cdots A_n$
$\vdash_M$ g.d.w $(p,A_i,q,C,L)\in\Delta$
$A_1A_2\cdots\, q\, A_{i-1}CA_{i+1}\cdots A_n$

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, p\, A_iA_{i+1}A_n$
$\vdash_M$ g.d.w $(p,A_i,q,C,R)\in\Delta$
$A_1A_2\cdots A_{i-1}C\, q\, A_{i+1}\cdots A_n$

Rechenschrittrelation $\vdash_{\mathbf{M}}$ auf K_M

(neue Bandzellen werden zum ersten Mal benutzt)

$$p\ A_1A_2\cdots A_n \vdash_{\mathbf{M}} q\ \#CA_2\cdots A_n \quad \text{g.d.w } (p,A_1,q,C,L)\in\Delta$$

$$A_1\cdots A_{n-1}\ p\ A_n \vdash_{\mathbf{M}} A_1\cdots A_{n-1}C\ q\ \# \quad \text{g.d.w } (p,A_n,q,C,R)\in\Delta$$

Rechenrelation $\vdash_{\mathbf{M}}^*$ auf K_M : reflexive, transitive Hülle von $\vdash_{\mathbf{M}}$

TM M akzeptiert Eingabe $x\in\Sigma^*$

g.d.w.

$init(x) \vdash_{\mathbf{M}}^* \phi$ für irgendein $\phi\in\Phi$

$L(M) = \{ x\in\Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x \}$