

### Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$

- $\Sigma$  Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$  Bandalphabet
- $\# \in \Gamma \setminus \Sigma$  Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)
- $Q$  Zustandsmenge (endlich)
- $s \in Q$  Startzustand
- $F \subset Q$  Endzustände
- $\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\})$  Rechenstrittregeln

Labels for  $\Delta$  components:  
 -  $Q$ : derzeitiger Zustand  
 -  $\Gamma$ : derzeitiges gelesenes Symbol  
 -  $Q$ : neuer Zustand  
 -  $\Gamma$ : geschriebenes Symbol  
 -  $\{L, B, R\}$ : Kopfbewegung (L = links, R = rechts, B = bleibe)

27.11.2015 2

### Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$

Konfigurationsraum für  $M$ :  $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1 A_2 \dots A_{i-1} q A_i \dots A_n$  bedeutet: Bandinhalt ist  $A_1 \dots A_n$   
 Zustand ist  $q$   
 S/L-Kopf über  $A_i$

Achtung: noch nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für  $x \in \Sigma^+$ :  $init(x) = s x$   
 für  $x \in \Sigma^0$ :  $init(\epsilon) = s \#$

Endkonfigurationen:  $\Phi = \Gamma^* F \Gamma^+$

27.11.2015 3

### Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$

Konfigurationsraum für  $M$ :  $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1 A_2 \dots A_{i-1} q A_i \dots A_n$  bedeutet: Bandinhalt ist  $A_1 \dots A_n$   
 Zustand ist  $q$   
 S/L-Kopf über  $A_i$

Achtung: noch nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für  $x \in \Sigma^+$ :  $init(x) = s x$   
 für  $x \in \Sigma^0$ :  $init(\epsilon) = s \#$

Alternative Endkonfigurationen:  $\Phi_\epsilon = \#^* F \#^+$  Am Ende Bandinhalt löschen

27.11.2015 4

Rechenschrittrelation  $\vdash_M$  auf  $K_M$

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 \dots A_{i-1} p A_i A_{i+1} \dots A_n \\ \vdash_M \\ A_1 A_2 \dots A_{i-1} q C A_{i+1} \dots A_n \end{array} \text{ g.d.w. } (p, A_i, q, C, B) \in \Delta$$

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 \dots A_{i-1} p A_i \dots A_n \\ \vdash_M \\ A_1 A_2 \dots q A_{i-1} C A_{i+1} \dots A_n \end{array} \text{ g.d.w. } (p, A_i, q, C, L) \in \Delta$$

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 \dots A_{i-1} p A_i A_{i+1} A_n \\ \vdash_M \\ A_1 A_2 \dots A_{i-1} C q A_{i+1} \dots A_n \end{array} \text{ g.d.w. } (p, A_i, q, C, R) \in \Delta$$

27.11.2015 5

Rechenschrittrelation  $\vdash_M$  auf  $K_M$

( neue Bandzellen werden zum ersten Mal benutzt )

$$\begin{array}{l} p A_1 A_2 \dots A_n \\ \vdash_M \\ q \# C A_2 \dots A_n \end{array} \text{ g.d.w. } (p, A_1, q, C, L) \in \Delta$$

$$\begin{array}{l} A_1 \dots A_{n-1} p A_n \\ \vdash_M \\ A_1 \dots A_{n-1} C q \# \end{array} \text{ g.d.w. } (p, A_n, q, C, R) \in \Delta$$

27.11.2015 6

Rechenrelation  $\vdash_M^*$  auf  $K_M$ : reflexive, transitive Hülle von  $\vdash_M$

TM  $M$  akzeptiert Eingabe  $x \in \Sigma^*$

g.d.w.

$\text{init}(x) \vdash_M^* \phi$  für irgendein  $\phi \in \Phi$

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x \}$

27.11.2015 7

**Satz:**  $L$  Sprache

$L = L(M)$  für irgendeine einfache Turingmaschine  $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta) \Leftrightarrow L = L(G)$  für irgendeine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$

Beweisidee:

Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

$$\begin{array}{l} \dots k_i \vdash_M k_{i+1} \vdash_M k_{i+2} \vdash_M \dots \\ \dots k_i \xleftarrow{G} k_{i+1} \xleftarrow{G} k_{i+2} \xleftarrow{G} \dots \end{array}$$

27.11.2015 8

**Satz: L Sprache**  
 $L = L(M)$  für irgendeine einfache Turingmaschine  $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta) \Leftrightarrow L = L(G)$  für irgendeine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$

Beweis: " $\Rightarrow$ "  
 Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

neuer Startzustand  
 $s' x \vdash_M s x \vdash_M \dots \vdash_M k_i \vdash_M \dots \vdash_M X f Y$   
 $x \leftarrow_G s' x \leftarrow_G s x \leftarrow_G \dots \leftarrow_G k_i \leftarrow_G \dots \leftarrow_G X f Y \quad * \leftarrow_G f \leftarrow_G S$

27.11.2015 9

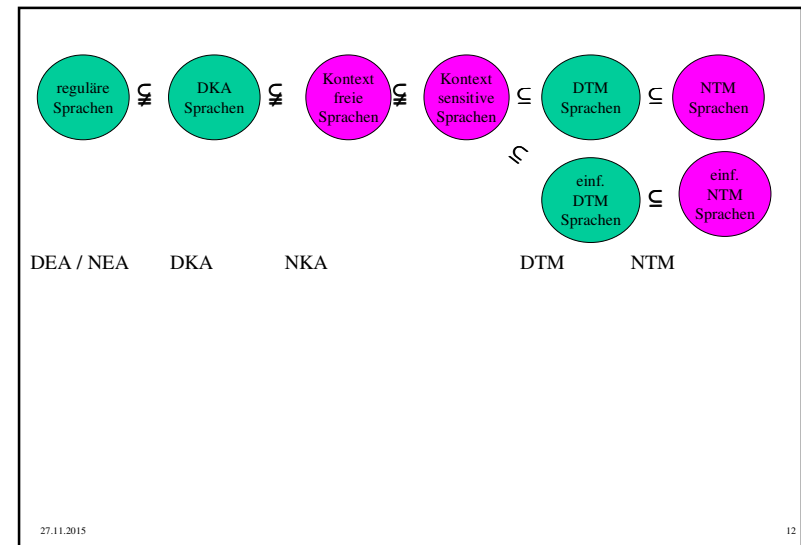
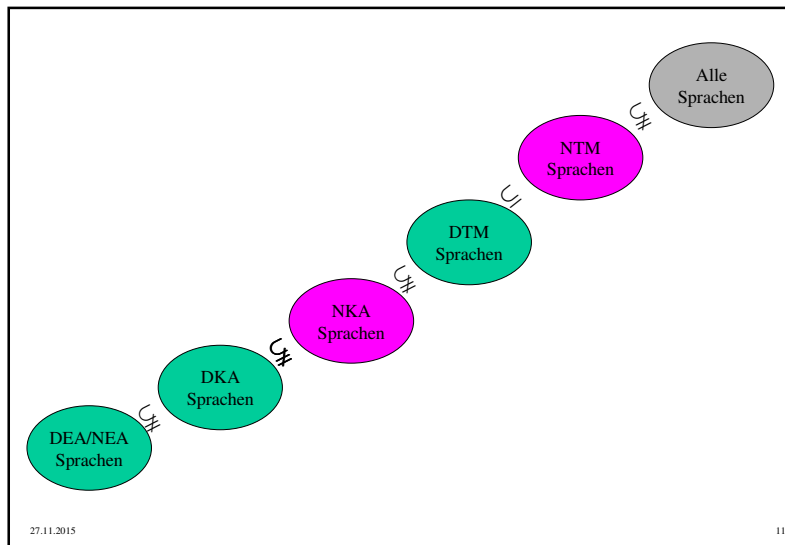
**Satz: L Sprache**  
 $L = L(M)$  für irgendeine einfache Turingmaschine  $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta) \Leftrightarrow L = L(G)$  für irgendeine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$

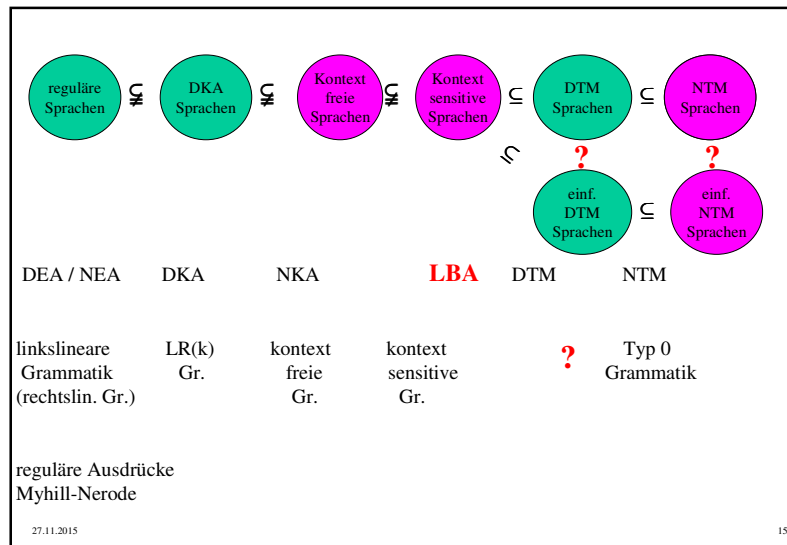
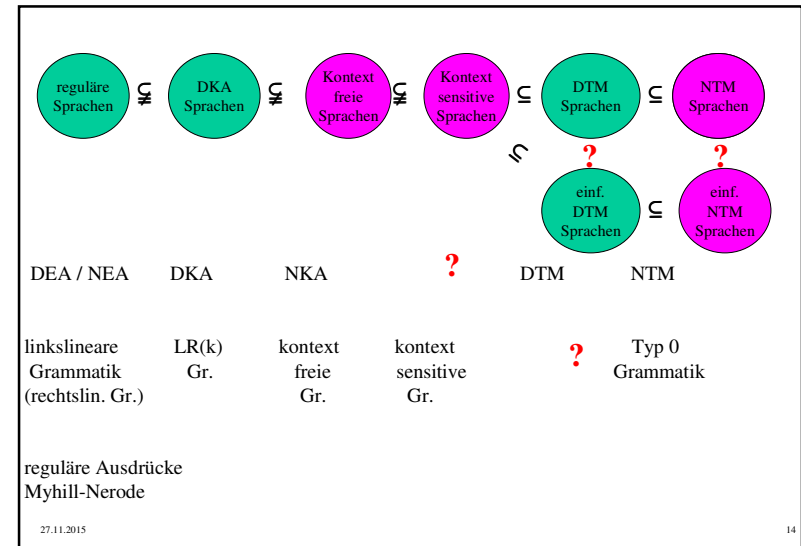
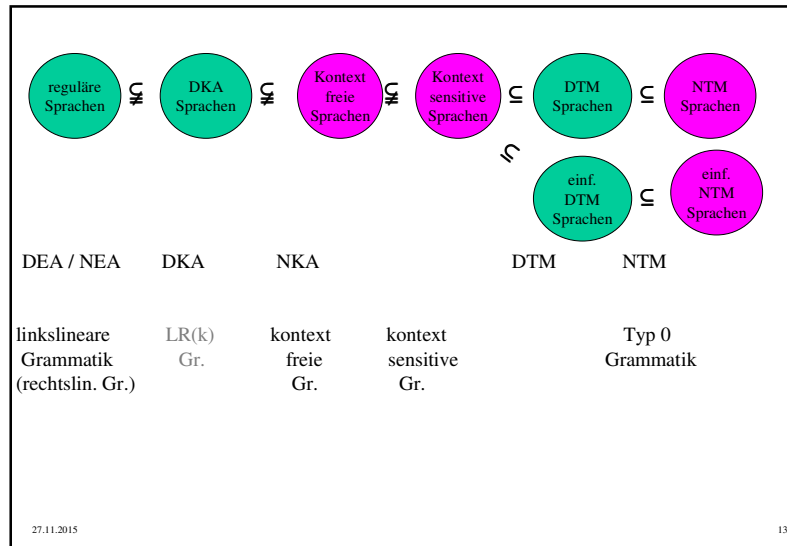
Beweis: " $\Leftarrow$ "  
 Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge  
 Produktionsanwendungen werden nichtdeterministisch rückgängig gemacht.

$x \leftarrow_G \dots \leftarrow_G U \leftarrow_G V \leftarrow_G \dots \leftarrow_G S$

$s x \vdash_M s x \vdash_M^* \dots \vdash_M^* s U \vdash_M^* s V \vdash_M^* \dots \vdash_M^* s S \vdash_M^* f \#$

27.11.2015 10

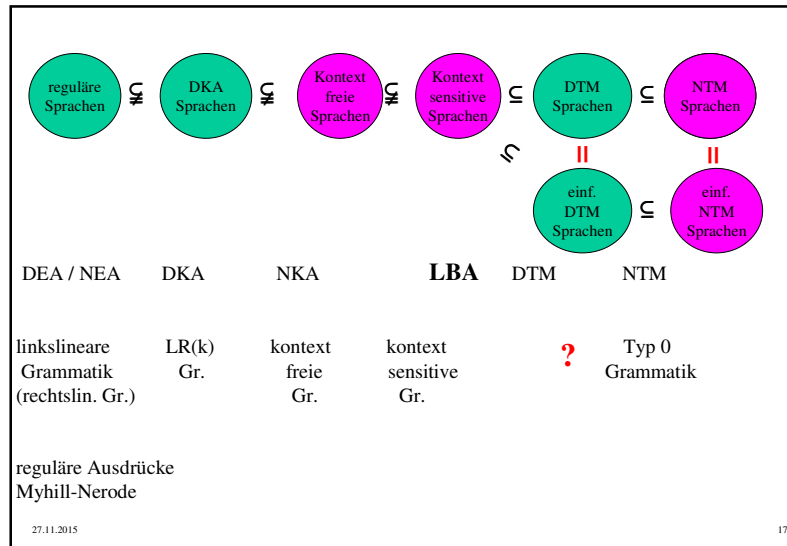




**LBA** linear beschränkter Automat:  
nicht deterministische einfache TM, die nur die Bandzellen der Eingabe verwendet

**Satz:** Die Sprachen, die durch kontextsensitive Grammatiken generiert werden können, sind genau die Sprachen, die durch LBAs akzeptiert werden können.

27.11.2015 16



### k-Band Turingmaschine:

Eingabeband mit Lesekopf (kein Schreiben)  
k Arbeitsbänder, jedes mit einem unabhängigen Lese-/Schreibkopf

$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$

|               |   |
|---------------|---|
| $\Sigma$      | Eingabealphabet                                       |
| $\Gamma$      | Arbeitsbandalphabet                                   |
| $\#$          | Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen) |
| $Q$           | Zustandsmenge (endlich)                               |
| $s \in Q$     | Startzustand  |
| $F \subset Q$ | Endzustände   |

$\Delta \subset (Q \times \Sigma \times \Gamma^k) \times (Q \times \{L, B, R\}) \times (\Gamma \times \{L, B, R\})^k$     Rechenschrittregeln

Zustand E-Band A-Bänder    Zustand E-Kopf zu schreibendes A-Kopf-  
 derzeitig    neu    bewegung    Symbol    bewegung

27.11.2015 18

**Satz:**

L von einf. DTM akzeptiert

$\Leftrightarrow$  L von DTM akzeptiert

$\Leftrightarrow$  L von k-Band DTM akzeptiert

**Beh 1:** L von einf. DTM akzeptiert  $\Rightarrow$  L von DTM akzeptiert

**Beh 2:** L von DTM akzeptiert  $\Rightarrow$  L von k-Band DTM akzeptiert

**Beh 3:**  
L von k-Band DTM akzeptiert  $\Rightarrow$  L von einf. DTM akzeptiert

27.11.2015 19

**Beh 3:** L von k-Band DTM akzeptiert  $\Rightarrow$  L von einf. DTM akzeptiert

Beweisidee: Sei M die k-Band DTM, die L akzeptiert.

Baue einfache DTM M', die M schrittweise simuliert.

das Eingabeband und die k Arbeitsbänder von M werden als k+1 „Spuren“ auf Band von M' realisiert (plus Markierungen für simulierte Kopfpositionen)

$\Gamma' = \Sigma \cup (\Gamma \times \{0, 1\})^{k+1}$

M' geht in 2 Phasen vor:

- Phase 0: Wandle Eingabe um und "Formatiere" Band in k+1 Spuren
- Phase 1: Simuliere jeden Schritt von M mit Hilfe von je (2k+2)-maligen Überstreichen des gesamten Bandinhalts

27.11.2015 20

**Satz:**

- L von einf. NTM akzeptiert
- ⇔ L von NTM akzeptiert
- ⇔ L von k-Band NTM akzeptiert

27.11.2015 21

|  |              |                         |                             |     |                    |
|--|--------------|-------------------------|-----------------------------|-----|--------------------|
| DEA / NEA                                  | DKA          | NKA                     | <b>LBA</b>                  | DTM | NTM                |
| linkslin.<br>Grammatik<br>(rechtslin. Gr.) | LR(k)<br>Gr. | kontext<br>freie<br>Gr. | kontext<br>sensitive<br>Gr. | ?   | Typ 0<br>Grammatik |
| reguläre Ausdrücke<br>Myhill-Nerode        |              |                         |                             |     |                    |

27.11.2015 22

|  |              |                         |                             |     |                    |
|--|--------------|-------------------------|-----------------------------|-----|--------------------|
| DEA / NEA                                  | DKA          | NKA                     | <b>LBA</b>                  | DTM | NTM                |
| linkslin.<br>Grammatik<br>(rechtslin. Gr.) | LR(k)<br>Gr. | kontext<br>freie<br>Gr. | kontext<br>sensitive<br>Gr. | ?   | Typ 0<br>Grammatik |
| reguläre Ausdrücke<br>Myhill-Nerode        |              |                         |                             |     |                    |

27.11.2015 23