**Konfiguration von TM M** bei Eingabe **w** und höchstens **N** Zellen/A-Band

| Inhalt Eingabeband | | Lesekopf Position | | Zustand | | Inhalt der k Arbeitsbänder | | Positionen der k Lese/Schreibköpfe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{w\}$ | $\times$ | $\{1,\cdots,\lvert w\rvert\}$ | $\times$ | $Q$ | $\times$ | $(\Gamma^N)^k$ | $\times$ | $\{1,\cdots,N\}^k$ |

$KG_M(w,N)$ **Konfigurationsgraph von TM M** bei Eingabe **w** und höchstens **N** Zellen/A-Band

Knoten: Konfigurationen $\{1,\cdots,|w|\}\times Q\times(\Gamma^N)^k\times\{1,\cdots,N\}^k$

Kanten: $[C,C'\rangle$ wenn **M** in einem Rechenschritt von Konf. $C$ zu Konfig. $C'$ kommt

Anzahl der Knoten: $\leq n\cdot|Q|\cdot|\Gamma|^{kN}\cdot N^k$ $n=|w|$

Anzahl der Kanten: $\leq \alpha\cdot n\cdot|Q|\cdot|\Gamma|^{kN}\cdot N^k$ $\alpha$ eine von M abh. Konstante



$KG_M(w,N)$ **Konfigurationsgraph von TM M** bei Eingabe **w** und höchstens **N** Zellen/A-Band $n=|w|$

Knoten: Konfigurationen

Kanten: $[C,C'\rangle$ wenn **M** in einem Rechenschritt von Konf. $C$ zu Konfig. $C'$ kommt

Anzahl der Knoten: $\leq n\cdot|Q|\cdot|\Gamma|^{kN}\cdot N^k \leq A^N$ (falls $N\geq \log_2 n$) $A$ eine von $M$ abh. Konstante

Eingrad und Ausgrad jedes Knoten $\leq \alpha$ $\alpha$ eine von $M$ abh. Konstante



Sei $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend, aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=\infty$

z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n)\geq \log_2 n$

**Satz A:** (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$



Sei $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend, aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=\infty$

z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n)\geq \log_2 n$

**Satz A:** (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{DSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

**Lemma A:** (i) $L\in\mathrm{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L\in\mathrm{DSPACE}(f(n))$

(ii) $L\in\mathrm{DSPACE}(f(n)) \Rightarrow L\in\mathrm{DTIME}(A^{f(n)})$ für eine von $L$ abh. Konstante $A$



Sei $f(n)\geq \log_2 n$

**Lemma A:** (i) $L\in\mathrm{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L\in\mathrm{DSPACE}(f(n))$

(ii) $L\in\mathrm{DSPACE}(f(n)) \Rightarrow L\in\mathrm{DTIME}(A^{f(n)})$ für eine von $L$ abh. Konstante $A$

Bew: (i) trivial

(ii) $M$ det. TM für $L$ mit Platzverbrauch $f(n)$

$w$ Eingabe für $M$ $n=|w|$, $N=f(n)$ ( $\geq \log_2 n$ )

Berechnung von $M$ entspricht Pfad durch $KG_M(w,N)$

$KG_M(w,N)$ hat höchstens $A^N$ Knoten

$\Rightarrow$ $M$ macht auf Eingabe $w$ höchstens $A^N$ viele Schritte (sonst Endlosloop ! )

$\Rightarrow$ $M$ entscheidet $L$ in Zeit $A^{f(n)}$ $\Rightarrow$ $L\in\mathrm{DTIME}(A^{f(n)})$



Sei $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend, aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty}\gamma(n)=\infty$

z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n)\geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

**Satz B:** (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit O(f(n)) Platz berechnet werden kann)

**Satz B:** (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\mathrm{DTIME}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{NTIME}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{DTIME}(\, 2^{\gamma(n) f(n)}\,)$$

**Lemma B:** (i) $L \in \mathrm{DTIME}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{NTIME}(\, f(n)\,)$

(ii) $L \in \mathrm{NTIME}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{DTIME}(\, A^{f(n)}\,)$

für eine von $L$ abh. Konstante $A$



Sei $f(n) \geq \log_2 n$

**Lemma B:** (i) $L \in \mathrm{DTIME}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{NTIME}(\, f(n)\,)$

(ii) $L \in \mathrm{NTIME}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{DTIME}(\, A^{f(n)}\,)$

für eine von $L$ abh. Konstante $A$

Bew: (i) trivial
(ii) $M$ nicht-det. TM für $L$ mit Zeitverbrauch und daher Platzverbrauch $f(n)$
$w$ Eingabe für $M$ $n=|w|$, $N=f(n)$ ( $\geq \log_2 n$ )

Berechnung von $M$ entspricht Pfad durch $KG_M(w,N)$
von init(w) zu einer Endkonfiguration

$KG_M(w,N)$ hat höchstens $A^N$ Knoten und $O(A^N)$ Kanten

$\Rightarrow$ det. TM $M'$ macht Tiefensuche (DFS) in $KG_M(w,N)$ und testet, ob
eine Endkonfiguration von init(w) erreichbar; braucht Zeit O( # Kanten )

$\Rightarrow$ $M'$ entscheidet $L$ in Zeit $O(A^{f(n)})$ $\Rightarrow$ $L \in \mathrm{DTIME}(\, A^{f(n)}\,)$



Sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit O(f(n)) Platz berechnet werden kann)

**Satz C:** (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz) (Savitch)

$$\mathrm{DSPACE}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{DSPACE}(\, f^2(n)\,)$$



Sei $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n\to\infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log\log\log\log\log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit O(f(n)) Platz berechnet werden kann)

**Satz C:** (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz) (Savitch)

$$\mathrm{DSPACE}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \subseteq \mathrm{DSPACE}(\, f^2(n)\,)$$

**Lemma C:** (i) $L \in \mathrm{DSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,)$

(ii) $L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{DSPACE}(\, f(n)^2\,)$



**Lemma C:** (i) $L \in \mathrm{DSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,)$

(ii) $L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{DSPACE}(\, f(n)^2\,)$

Bew: (i) trivial
(ii) $M$ nicht-det. TM für $L$ mit daher Platzverbrauch $f(n)$
$w$ Eingabe für $M$ $n=|w|$, $N=f(n)$ ( $\geq \log_2 n$ )

Berechnung von $M$ entspricht Pfad durch $KG_M(w,N)$
von init(w) zu einer Endkonfiguration

$KG_M(w,N)$ hat höchstens $A^N$ Knoten und $O(A^N)$ Kanten ($A$ konstant)

Daher ist die Darstellungsgröße von Knoten $O(\log A^N) = O(N \cdot \log A) = O(f(n))$

$\Rightarrow$ Brauche det. TM $M'$ (deterministischen Algorithmus) zum Testen,
ob in $KG_M(w,N)$ eine Endkonfiguration von init(w) erreichbar ist;

Dieser Algorithmus soll wenig Platz brauchen !!



**Lemma C:** $L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow L \in \mathrm{DSPACE}(\, f(n)^2\,)$

**Lemma D:** $L \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,) \Rightarrow \overline{L} \in \mathrm{NSPACE}(\, f(n)\,)$

**Lemma C:** L ∈ NSPACE( f(n) ) ⇒ L ∈ DSPACE( $f(n)^2$ )

**Lemma D:** L ∈ NSPACE( f(n) ) ⇒ $\overline{L}$ ∈ NSPACE( f(n) )

Der Beweis reduziert sich auf "Berechnen" von Erreichbarkeit in einem sehr großen, implizit gegebenen Graphen. Es muss die Frage beantwortet werden

∃ gerichteter Pfad von $start_w$ zu einer Endkonfiguration im Konfigurationsgraphen $KG_M(w,N)$

n=|w| N=f(n)



Abstraktes Problem:

Gerichteter Graph G = (V,E) ist implizit gegeben, d.h. man kann
(i) die Knoten in V aufzählen
(ii) für zwei Knoten u,v testen, ob u=v
(iii) für zwei Knoten u,v testen, ob [u,v⟩ ∈ E
und zwar jeweils mit Speicherverbrauch O(log |V|) (Knotendarstellungsgröße)

Berechne

erreichbar( s , v, λ ) . . . gibt es in G einen gerichteten Pfad von s nach v der Länge höchstens λ ?



Für Beweis von Lemma C, deterministische Lösung mit $O(\log^2|V|)$ Platzverbrauch

```
erreichbar( s , v, λ ) = if λ =0 then return (s=v)
                         if λ =1 then return (s=v) or [s,v⟩∈E
                         else
                           for each m∈V do
                             if    erreichbar( s , m , ⌊λ/2⌋ )
                               and  erreichbar( m , v ,⌈λ /2⌉ )
                             then return true
                           endfor
                           return false
```

Laufzeit: O((log λ)· Darstellungsgröße(v) ) = O ($\log^2|V|$) mit λ=|V|