Komplexitätsklassen

Klasse P

$$P = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{DTIME}(n^k)$$

In P sind Probleme, die sich in polynomieller Zeit deterministisch lösen lassen.

Komplexitätsklassen

Klasse P

$$P = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{DTIME}(n^k)$$

In P sind Probleme, die sich in polynomieller Zeit deterministisch lösen lassen.

Klasse NP

$$NP = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{NTIME}(n^k)$$

In NP sind Probleme, deren Lösungen sich in polynomieller Zeit verifizieren lassen.

Komplexitätsklassen

Weitere wichtige Klassen

$$\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{DSPACE}(n^k)$$

$$\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{NSPACE}(n^k)$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{DSPACE}(\log \mathrm{n})$$

$$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log \mathrm{n})$$

Komplexitätsklassen

Satz

Es gilt

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq^* \mathrm{P} \subseteq^* \mathrm{NP} \subseteq^* \mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE},$$

wobei wenigstens eine der Inklusionen $\subseteq^*$ *eine echte Inklusion* $\subsetneqq$ *ist.*

Beweis.

Benutze die Ergebnisse aus der 25. Vorlesung. □

Komplexitätsklassen

- Besonders wichtig sind im Folgenden die Klassen P und NP.
- Probleme in P sind *effizient* lösbar.
  Bei Problemen außerhalb P ist das vermutlich nicht möglich.

$$\begin{array}{rcl} \text{polynomiell} & \approx & \text{„gut“} \\ \text{suprapolynomiell} & \approx & \text{„schlecht“} \end{array}$$

Cliquen

Definition

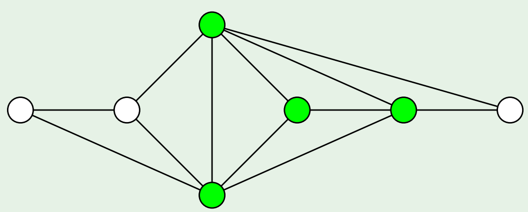
Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Eckenmenge $W \subseteq V$ heiße eine *Clique*, wenn für alle Ecken $u, v \in W$ gilt: $[u, v] \in E$.
(Die Ecken aus W bilden einen vollständigen Untergraphen.)

Cliquen

Definition

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Eckenmenge $W \subseteq V$ heiße eine *Clique*, wenn für alle Ecken $u, v \in W$ gilt: $[u, v] \in E$.
(Die Ecken aus W bilden einen vollständigen Untergraphen.)

Beispiel



Die markierten Ecken bilden eine Clique der Größe 4.

Varianten des Clique-Problems

Es sei G ein ungerichteter Graph.

Variante	Gegeben	Frage/Aufgabe
Entscheidbarkeit	G, $k \in \mathbb{N}$	Existiert eine Clique der Größe k?
Optimierung	G	Bestimme maximales k, so dass G eine Clique der Größe k besitzt.
Optimierung/ Berechnung	G	Berechne eine Clique maximaler Größe.

Wie hängen die Varianten zusammen?

Klar ist

1. Var. 2 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 1 in polyn. Zeit lösbar
2. Var. 3 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 2 in polyn. Zeit lösbar

Wie hängen die Varianten zusammen?

Klar ist

1. Var. 2 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 1 in polyn. Zeit lösbar
2. Var. 3 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 2 in polyn. Zeit lösbar

Lemma

1. *Var. 1 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar*
2. *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 3 in polyn. Zeit lösbar*

Wie hängen die Varianten zusammen?

Klar ist

1. Var. 2 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 1 in polyn. Zeit lösbar
2. Var. 3 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 2 in polyn. Zeit lösbar

Lemma

1. *Var. 1 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar*
2. *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 3 in polyn. Zeit lösbar*

Beweis.

1. Teste für jedes k, $1 \leq k \leq |V|$, ob G eine Clique der Größe k enthält.

$\square$

Wie hängen die Varianten zusammen?

Klar ist

1. Var. 2 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 1 in polyn. Zeit lösbar
2. Var. 3 in polyn. Zeit lösbar $\Longrightarrow$ Var. 2 in polyn. Zeit lösbar

Lemma

1. *Var. 1 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar*
2. *Var. 2 in polyn. Zeit lösbar* $\Longrightarrow$ *Var. 3 in polyn. Zeit lösbar*

Beweis.

1. Teste für jedes k, $1 \leq k \leq |V|$, ob G eine Clique der Größe k enthält.
2.
   1. Bestimme die Größe k der maximalen Clique.
   2. Entferne sukzessive Ecken und teste, ob der resultierende Graph immer noch eine Clique der Größe k enthält.

$\square$