1. **(12 Punkte)**

   (a) Argumentieren Sie auf einfache Weise, dass $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k$, die Menge aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen, abzählbar ist.

   (b) Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ an.
   (*Hinweis: Jede positive natürliche Zahl hat eine eindeutige Primfaktorenzerlegung.*)

2. **(8 Punkte)** Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *monoton fallend*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \geq f(n+1)$. Sie heißt *monoton steigend*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $f(n) \leq f(n+1)$.

   (a) Ist die Menge dieser monoton fallenden Funktionen abzählbar oder nicht?

   (b) Ist die Menge dieser monoton steigenden Funktionen abzählbar oder nicht?

   Beweisen Sie Ihre Antworten.

3. **(15 Punkte)** Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Untersuchen Sie jede der drei folgenden Sprachen über Σ^*, ob sie DEA-Sprache ist oder nicht. Beweisen Sie Ihre Antworten: im positiven Fall durch die Angabe eines geeigneten endlichen Automaten, dargestellt durch seinen Übergangsgraphen (inklusive einer Erklärung); im negativen Fall durch den Nachweis von unendlich vielen Fortsetzungssprachen.

   Anmerkung: $\#_a(w)$ zählt, wie oft der Buchstabe a im Wort w vorkommt.

   (a) $L_1 = \{\, w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod 2 = \#_b(w) \bmod 2 \,\}$

   (b) $L_{k,\ell} = \{\, w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \bmod k \neq \#_b(w) \bmod \ell \,\}$, mit k und ℓ fest vorgegebene positive ganze Zahlen.

   (c) $L_3 = \{\, w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \,\}$

4. **(6 Punkte)** Skizzieren Sie einen DEA, der die folgende Sprache erkennt:

   $$S = \{\, a^n \mid n > 1600 \text{ und } n \text{ ist ein Schaltjahr nach dem gregorianischen Kalender} \,\}$$

5. **(12 Punkte)** Für einen Bitstring $u \in \{0,1\}^*$ bezeichnen wir mit $\langle u \rangle$ die natürliche Zahl, die durch u binär dargestellt wird; also $\langle u_{k-1}u_{k-1} \cdots u_1u_0 \rangle = \sum_{0\leq i<k} u_i 2^i$.

   Untersuchen Sie jede der folgenden Sprachen, ob sie eine DEA-Sprache ist, oder nicht.

   (a) $L_4 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle \text{ durch 6 teilbar}\}$

   (b) $L_5 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle \text{ ist eine Quadratzahl}\}$