1. **(10 Punkte)** Eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ heißt *lexikographisch rekursiv aufzählbar*, wenn A endlich ist, oder wenn es eine überall berechenbare Funktion $G : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gibt, die "A lexikographisch aufzählt", das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $G(n)$ der lexikographisch n-kleinste String in A. (genauer gesagt, der $(n+1)$-kleinste String).

   Zeigen Sie: A ist genau dann lexikographisch rekursiv aufzählbar, wenn A entscheidbar ist.

2. **(10 Punkte)** In der Vorlesung wurde der Begriff der *Reduktion* definiert. Zur Erinnerung, man sagt, Sprache $A \subset \Sigma^*$ *reduziert sich auf* Sprache $B \subset \Gamma^*$, in Zeichen $A \preceq B$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

   Beweisen Sie, die Relation $\preceq$ ist transitiv. D.h. aus $A \preceq B$ und $B \preceq C$ folgt, dass auch $A \preceq C$ gilt.

3. **(10 Punkte)** Wir nennen eine Partitionierung der Zustandsmenge Q einer Turingmaschine in zwei Teilmengen Q_1 und Q_2 *sequentiell*, wenn die Turingmaschine bei keiner Eingabe je einen Übergang von einem Zustand aus Q_1 zu einem Zustand aus Q_2 macht.

   Ist das Problem, ob bei gegebener Turingmaschine eine bestimmte Partitionierung ihrer Zustandsmenge sequentiell ist, entscheidbar?

   Formalisieren Sie dieses Problem sorgfältig und beweisen Sie Ihre Antwort.

4. **(10 Punkte)** Finden Sie eine Sprache L, sodass weder L noch $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar ist. Beweisen Sie Ihre Antwort.

   Hinweis: Seien Sie kreativ mit *SAM*. XOR kann eine nützliche Verknüpfung sein.