1. **(10 Punkte)** In der Vorlesung wurde der Begriff der *Polynomzeit-Reduktion* definiert. Zur Erinnerung, man sagt, die Sprache $A \subset \Sigma^*$ *reduziert sich polynomiell auf* Sprache $B \subset \Sigma^*$, in Zeichen $A \preceq_P B$, wenn es eine in Polynomialzeit berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

   Ist die Relation $\preceq_P$ transitiv? D.h., folgt aus $A \preceq_P B$ und $B \preceq_P C$ auch $A \preceq_P C$?

2. **(10 Punkte)** Es seien f und g zwei fast überall positive Funktionen. Beweisen Sie folgende, sehr nützliche Implikationen:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \geq 0 \implies f \in O(g)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \implies f \in o(g)$

3. **(8 Punkte)** Für jede der beiden Implikationen aus Aufgabe 2 untersuche die Frage, ob es sich nicht nur um eine Implikation, sondern sogar um eine Äquivalenz handelt. Beweisen Sie Ihre Antworten.

   Falls es sich nicht um eine Äquivalenz handelt, wie könnte man die Bedingung ändern, sodass es tatsächlich zu einer Äquivalenz wird?

4. **(5 Punkte)** Wir nennen eine Funktion g *exponentiell*, wenn es ein $c > 0$ gibt, sodass $g(n) \in O(2^{n^c})$. Analog zur Polynomzeit-Reduktion $\preceq_P$ von Aufgabe 1 kann man auch eine *Exponentialzeit-Reduktion* $\preceq_E$ definieren, bei der die Reduktionsfunktion f eine exponentielle Laufzeit hat.

   Warum ist das mathematisch keine besonders ergiebige Art von Reduktion?