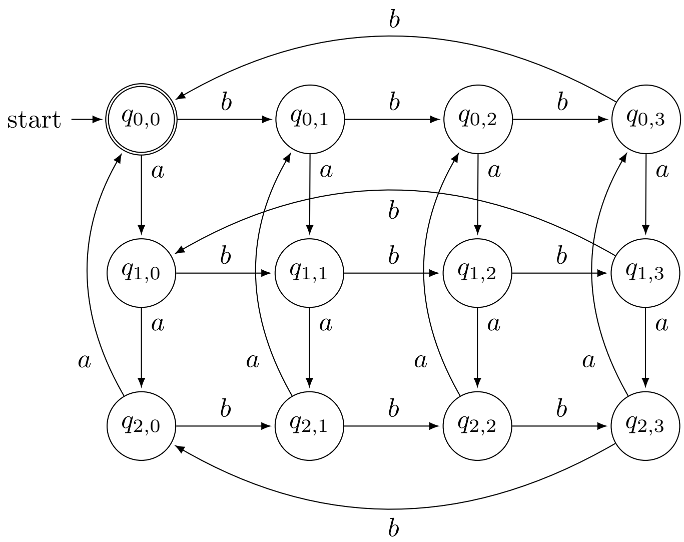
Aufgabe 1

(a) **Behauptung:** L_0 ist DEA-Sprache.

Beweis: M_0 sei der folgende DEA, mit $L_{M_0} = L_0$.
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 2\}$
$F = \{(0, 0)\}$
$s = (0, 0)$
$\Delta = \{\ (((i,\ j),\ a),\ (i + 1\ mod\ 4,\ j))\ \} \cup \{(((i,\ j),\ b),\ (i,\ j + 1\ mod\ 3))\}$



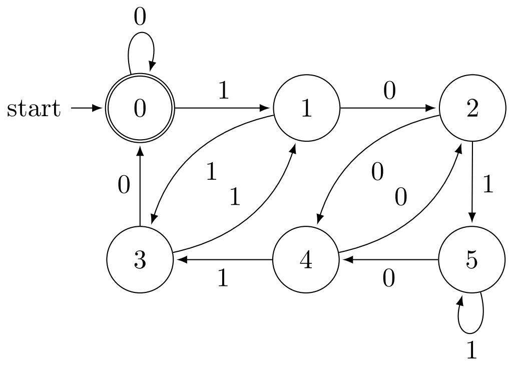
(b) Vergleiche Übungsblatt 2, Aufgabe 2.5 a)

Behauptung: L_1 ist DEA-Sprache.

Beweis:

Informal:
Wir konstruieren für jede Restklasse bezüglich modulo 6 einen Zustand. Um die Transitionen zu erhalten: Wir „verfolgen" einen Wert von einer Restklasse in eine andere, wenn man den Wert mit 2 multipliziert (d.h. eine 0 nach dem bisher gelesenen Teilwort lesen), bzw. ihn darüber hinaus um 1 erhöht (d.h. es wird eine 1 als nächstes Zeichen gelesen). Das leere Wort ε kann auch als die Kodierung der 0 interpretiert werden, da die leere Summe als 0 definiert ist.

Formal:
Sei M_1 wie folgt definiert und es gilt $L_{M_1} = L_1$.
$\Sigma = \{0, 1\}$
$Q = \{i \mid 0 \leq i \leq 5\}$
$F = \{0\}$
$s = 0$
Δ, siehe Graph, Transitionsbeschriftung.



(c) Vergleiche Übungsblatt 2, Aufgabe 2.5 b)

Behauptung: L_2 ist keine DEA-Sprache.

Beweis:

Definiere für gerades $n \geq 2 : w_n := 10^{n-2}1$. Sei x die kleinste Binärzahl ungerader Länge, sodass $w_n x \in L_2$. Wegen $|0^{n-2}1x|$ gerade, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\langle 10^{n-2}1x \rangle = 2^{2k} + a$, wobei $a = \langle 1x \rangle > 0$.
Da a minimal gilt:

$$\begin{aligned}
&2^{2k} + a = (2^k + 1)^2 = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow a = 2^{k+1} + 1 \text{ und } x = 0^k 1 \\
&\Rightarrow 2^{n+k} + 2^{k+1} + 1 = \langle 10^{n-2}10^k 1 \rangle = 2^{2k} + 2^{k+1} + 1 \\
&\Rightarrow n = k \text{ und } x = 0^n 1
\end{aligned}$$

Damit ist $x = 0^n 1$ das kleinste Element in $F_{L_2}(w_n)$ mit ungerader Länge. Also gibt es unendlich viele Fortsetzungssprachen und L_2 ist nicht regulär.

(d) **Behauptung:** L_3 ist DEA-Sprache.

Beweis:

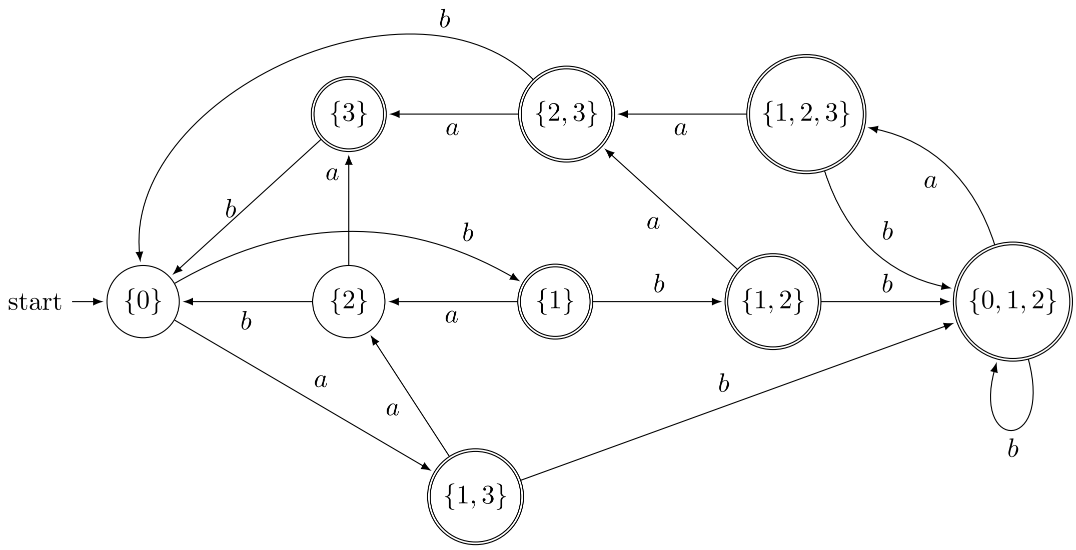
Wir definieren ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $\langle w \rangle = y$ und $y > 2$. Des weiteren sei $w_{x_1} \in F_{L_3}(w), \langle w_{x_1} \rangle = x_1$, sodass $\langle w w_{x_1} \rangle = y \cdot 2^{|w_{x_1}|} + x_1$ eine Primzahl ist. Diese Kombination existiert wegen dem Hinweis. Wir definieren nun:
$\langle w^{(1)} \rangle = y$
$\langle w^{(2)} \rangle = y \cdot x_1$
$\langle w^{(3)} \rangle = y \cdot x_1 \cdot x_2$, mit $x_2 = \langle w_{x_2} \rangle$, sodass $\langle w^{(2)} w_{x_2} \rangle$ Prim ist.
$\langle w^{(i)} \rangle = y \cdot \prod_{k=1}^{i-1} x_k$, mit $x_k = \langle w_{x_k} \rangle$, sodass $\langle w^{(k)} w_{x_k} \rangle$ Prim ist $\forall j.\ 1 \leq j \leq i-1$.
Sei nun $i < j$. $F_{L_3}\left(w^{(i)}\right)$ und $F_{L_3}\left(w^{(j)}\right)$ unterscheiden sich mindest in w_{x_i}, denn $w^{(i)} w_{x_i} \in L_3$, aber:

$$\begin{aligned}
\langle w^{(j)} w_{x_i} \rangle &= 2^{|w_{x_i}|} \cdot \langle w^{(j)} \rangle + \langle w_{x_i} \rangle \\
&= 2^{|w_{x_i}|} \cdot y \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_i \cdot \dots x_{j-1} + x_i \\
&= x_i \cdot \left(2^{|w_{x_i}|} \cdot y \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_{j-1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

und damit keine Primzahl. Daraus folgt, dass es unendlich viele Fortsetzungssprachen gibt.

Aufgabe 2

Der entsprechende Automat sieht wie folgt aus (unerreichbare Zustände sind nicht aufgeführt).



Aufgabe 3

Wir verwenden das Algorithmus zur DEA Minimierung aus der Vorlesung.

$i = 0:$

$$U_0 = \{(1, i), (6, i) \mid i \in \{2, 3, 4, 5\}\}$$
$$N = \{(1, 6), (i, j) \mid i, j \in \{2, 3, 4, 5\}, i \neq j\}$$

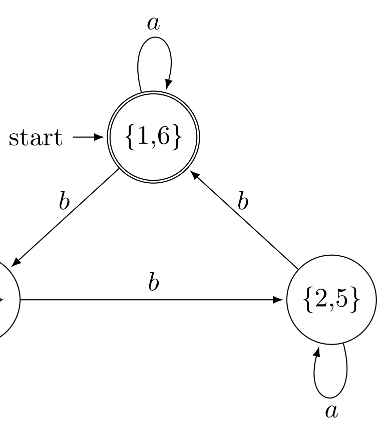
$i = 1:$

$$U_1 = \{(2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$
$$N = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$$

$i = 2:$

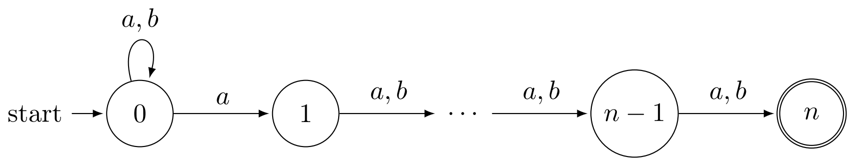
$$U_2 = \{\}$$
$$N = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$$

Die von M akzeptierte Sprache $L = \{a^*(ba^*ba^*ba^*)^*\}$ wird auch von folgendem DEA M' erkannt:



Aufgabe 4

(a) Ein NEA, der L_n erkennt ist gegeben durch:



(b) Seien $w = w_0 w_1 ... w_{n-1} \in \{a, b\}^n$ und $v = v_0 v_1 ... v_{n-1} \in \{a, b\}^n$. Seien $F_{L_n}(w)$ und $F_{L_n}(v)$ die Fortsetzungssprachen zu w und v. Sei $w \neq v$ dann existiert $i < n$ mit $w_i \neq v_i$. Ohne Beschränkung darf angenommen werden, dass $w_i = a$ und $v_i = b$. Dann gilt $b^i \in F_{L_n}(w)$ aber $b^i \notin F_{L_n}(v)$. Damit ist $F_{L_n}(w) \neq F_{L_n}(v)$ für alle unterschiedlichen w und v aus $\{a, b\}^n$. Damit existieren mindestens 2^n Fortsetzungssprachen von L_n. Für jede Fortsetzungssprache muss der DEA mindestens einen anderen Zustand besitzen.