Aufgabe 1

1. Für zwei Wörter $v = a^{2^{l_v}} \in L_0$ und $w = a^{2^{l_w}} \in L_0$ mit $|v| < |w|$ gilt $|w| - |v| \geq 2l_v$ (w ist um mindestens $2l_v$ Elemente länger als v)
   Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = a^{2^N} \in L_0$. Sei uvw beliebige Unterteilung von x mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$. (Dann gilt $v \in \{a^1, ..., a^N\}$) Wähle $i = 2$. uv^iw ist mindestens um 1 Zeichen länger als x und maximal um N Zeichen länger als x. Also gilt $uv^iw \notin L_0$. Somit ist L_0 nicht regulär.

2. Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $x = [^N]^N \in L_1$. Sei uvw beliebige Unterteilung von x mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$. (Dann gilt $v \in [^+$) Wähle $i = 0$. uv^iw enthält mindestens ein] mehr als [s. Also gilt $uv^iw \notin L_1$. Somit ist L_1 nicht regulär.

Aufgabe 2

Sei $M = (\Sigma, Q, F, s, \Delta)$ ein Automat, der L akzeptiert. Sei $N = |Q|$ und seien u, v, w Wörter mit $uvw \in L$ und $|v| = N$. Sei $|u| = l$, $|v| = n = N$ und $|w| = k$. Da $uvw \in L$ existiert ein Pfad $q_0, q_1, ..., q_{l+n+k}$ mit $q_0 = s$, $q_{l+n+k} \in F$ und $\forall i < l + n + k$:

- $(q_i, u_{i+1})\Delta q_{i+1}$ falls $i < l$
- $(q_i, v_{i+1-l})\Delta q_{i+1}$ falls $l \leq i < l + n$
- $(q_i, w_{i+1-l-n})\Delta q_{i+1}$ falls $l + n \leq i < l + n + k$

Da $n + 1 > |Q|$, gibt es mehr Zustände $q_l, ..., q_{l+n}$ als M verschiedene Zustände besitzt.Daher existieren i, j mit $l \leq i < j \leq l + n$ und $q_i = q_j$. Seien $xyz = v$ mit $|x| = i - l$ und $|y| = j - i > 0$. Dann existiert ein Teilpfad $q_0...q_i$ mit der Beschriftung ux, ein Teilpfad $q_i...q_j$ mit der Beschriftung y und ein Teilpfad $q_j...q_{l+n+k}$ mit der Beschriftung zw. Da $q_i = q_j$ können wir diesen Teilpfad beliebig oft, c-mal, durchlaufen und erhalten weiterhin einen Pfad $q_0...q_{l+n+k}$ mit dem das Wort uxy^czw akzeptiert wird. Damit gilt $uxy^czw \in L$.

Aufgabe 3

(a) Jedes Wort $uvw \in L$ enthält entweder aa als Teilstring, oder $\#_a(uvw) = 2^l$.
Sei $N = 3$. Fallunterscheidung über v:

Fall 1, v enthält mindestens ein b:
wähle für y ein beliebiges b in v
$\Rightarrow$ alle Teilstrings aa bleiben erhalten und $\#_a$ bleibt konstant in uxy^izw, für bel. $i \in \mathbb{N}$.

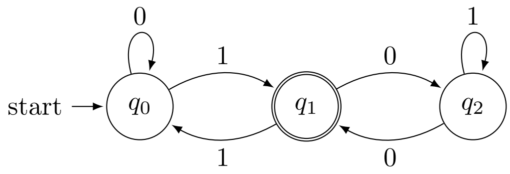
Fall 2, v enthält kein b:
wähle erstes a aus aaa als y
$\Rightarrow a^iaa$ enthält aa als Teilstring für bel. $i \in \mathbb{N}$.

Aus Fall 1 und Fall 2 folgt, das L die starke Pumping-Eigenschaft hat.

(b) Sei $w_n = (ab)^n$. w_n hat offensichtlich keinen Teilstring aa.
Für $m < n$, und beliebiges l mit $2^{l-1} > n$ gilt: $(ab)^{2^l-n} \in F_L(w_n)$, da $(ab)^n(ab)^{2^l-n}$ genau 2^l a hat.
Aber $(ab)^{2^l-n} \notin F_L(w_m)$, da $(ab)^m(ab)^{2^l-n}$ zwar mehr als 2^{l-1} a hat, da $2^l - n > 2^{l-1}$. Aber weniger als 2^l a, da $2^l - n + m < 2^l$, für $m < n$.
$\Rightarrow F_L(w_n) \neq F_L(w_m)$ für $m < n$ beliebig. Also ist L nicht regulär.

Aufgabe 4

Ein DEA, der die beschriebene Sprache akzeptiert, ist gegeben durch:



Entsprechend vorrausgehenden Aufgaben gilt im Zustand q_n für den bereits gelesenen Teilstring v $<v>$ mod $3 = n$.

Sei für $i, j < 3$ und $a < 3$, r_{ij}^a der reguläre Ausdruck, der alle Beschriftungen von Pfaden von q_i nach q_j beschreibt, die q_a nicht als internen Knoten enthalten. Da der DEA nur einen Endzustand q_1 besitzt, sind die Pfade, die in q_0 starten und in q_1 enden die akzeptierenden Pfade. Es existiert nur ein Ausdruck r_{01}^1, der von q_0 nach q_1 führt ohne q_1 mehrmals zu durchlaufen.
$r_{01}^1 = r_{00}^1 1 = 0^*1$.
Es werden nun die Ausdrücke angehängt, die von q_1 wieder nach q_1 führen. Man betrachte zuerst nur die Pfade, die von q_1 nach q_1 füheren ohne q_1 als internen Knoten zu durchlaufen.
$r_{11}^1 = 1r_{00}^1 1 + 0r_{22}^1 0 = 10^*1 + 01^*0$
Wir erhalten alle Pfade von q_1 nach q_1 durch die kleenesche Hülle dieser einfachen Pfade. Der gesuchte Ausdruck lautet damit: $0^*1(10^*1 + 01^*0)^*$

Aufgabe 5

Der folgende NKA akzeptiert die Sprache L_1:

- $\Sigma = \{\ [,\ ]\ \}$
- $\Gamma := \{L,\ \#\}$
- $\#$ als Kellerboden
- $Q := \{q_0,\ q_1\}$
- $s = q_0$
- $F := \{q_0\}$
- $\Delta := \{q_0,\ a,\ [,\ aL,\ q_0\} \ \cup\ \{q_0,\ L,\ ],\ \varepsilon,\ q_0\} \ \cup\ \{q_0,\ \#,\ ],\ \#,\ q_1\}$, $\forall a \in \Gamma$

Argumentation: Der Automat startet im Zustand q_0 mit leerem Keller. Jede eingelesene [merkt sich der Automat, indem er ein L, auf den Keller legt. Liest der Automat ein], wird ein L vom Keller entfernt. Dies ist solange möglich, bis alle L entfernt wurden. Liest der Automat bei leerem Keller ein], so ist die Bedingung 'korrekt geklammert' verletzt. Dann geht der Automat in den Zustand q_1 über und akzeptiert nie.
Der Automat akzeptiert im Zustand q_0, bei leerem oder nicht leerem Keller.