Fortsetzungssprachen

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Fortsetzungssprachen

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $L = \Sigma^*$

für jedes w gilt: $F_L(w) = \Sigma^*$

also $\mathcal{F}_L = \{ \Sigma^* \}$

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ \mathcal{F}_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $\Sigma = \{a,b\}$ $L = \{ u \in \Sigma^* \mid \#_a(u)$ ist durch 3 teilbar $\}$

$F_L(bbab) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 2 \}$

$F_L(ab) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 2 \}$

$F_L(aab) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 1 \}$

$F_L(abaab) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 0 \}$

$\mathcal{F}_L = \{ L_0, L_1, L_2 \}$ $L_i = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = i \}$

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ \mathcal{F}_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $\Sigma = \{a,b\}$ $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$F_L(bbab) = \{ \}$ $F_L(ab) = \{ \varepsilon \}$

$F_L(aab) = \{ b \}$ F_L(aaaaabb) = { bbb }

$F_L(aaa) = \{ bbb, abbbb, aabbbbb, \cdots \}$

$\mathcal{F}_L = \{ \{\} \} \cup \{ L_i \mid i \in \mathbb{N} \} \cup \{ S_j \mid j \in \mathbb{N} \}$

$L_i = \{ b^i \mid i \in \mathbb{N} \}$ $S_j = \{ a^{n-j} b^n \mid n \geq j \}$

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Beweisidee: Jeder Zustand q von M induziert eine Fortsetzungs-sprache $L_q = F_L(w)$ für jedes $w\in\Sigma^*$, das q "erreicht". Verschiedene Zustände können die gleiche Fortsetzungssprache definieren. M hat nur endlich viele Zustände also hat L nur endlich viele Fortsetzungssprachen.

Beweis: L DEA-Sprache $\Rightarrow \exists$ DEA $M=(Q,\Sigma,s,F,\Delta)$ mit $L(M)=L$

für $q\in Q$ sei $L_q = \{x\in\Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon)$ für irgendein $f\in F\}$

$F_L(w) = L_p$ mit p, so dass $(s,w)\vdash_M^*(p,\varepsilon)$

(und $F_L(w)=\{\}$, falls so ein p nicht existiert)

Also gilt $\mathcal{F}_L = \{ L_q \mid q\in Q \}$ (plus möglicherweise $\{\}$)

und $\mathcal{F}_L$ ist endlich.

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

d.h. $\mathcal{F}_L$ **nicht** endlich $\Rightarrow$ L **nicht** DEA-Sprache

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^*\}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i\neq j$.

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^*\}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i\neq j$.

Bsp: $L = \{ a^{n^2} \mid n\in\mathbb{N} \}$

Sei $w^{(i)} = a^{i^2}$ für $i\in\mathbb{N}$.

$i^2 + (2i+1) = (i+1)^2 \quad \Rightarrow \quad w^{(i)}a^{2i+1} = a^{(i+1)^2} \in L$

$w^{(i)}a^{2j+1} \notin L$ für $j<i$

$F_L(w^{(i)}) = \{\varepsilon, a^{2i+1}, \dots \}$

Also $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $j<i$, denn es gibt einen Unterschied im kürzesten nicht-leeren Wort

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^*\}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^n \mid n$ ist eine Primzahl $\}$

Sei $w^{(i)} = a^{p_i}$, mit p_i ist i-te Primzahl.

Fakten über Primzahlen:
1) Es gibt unendlich viele Primzahlen
   (Denn gäbe es N davon, dann hätte $p_1 \cdot p_2 \cdots p_N+1$ keinen Teiler)
2) Es gibt beliebig große Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen
   ($n!+2$, $n!+3$, $n!+4$,..., $n!+n$ bildet $n-1$ aufeinanderfolgende Nicht-Primzahlen)

2) $\Rightarrow$ es gibt unendlich viele verschiedene Lücken $\delta_i = p_{i+1} - p_i$ zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen

a^{δ_i} ist der kürzeste nicht-leere Sring in $F_L(w^{(i)})$

Also gibt es unendlich viele verschiedene Nachfolgesprachen $F_L(w^{(i)})$

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^*\}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Sei $w^{(i)} = a^i b$ für $i>0$.

$F_L(w^{(i)}) = \{ b^{i-1} \}$

Also $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^*\}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Sei $w^{(i)} = a^i b$ für $i>0$.

$F_L(w^{(i)}) = \{ b^{i-1} \}$

Also $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$

Also kann L durch keinen DEA akzeptiert werden, aber sehr wohl durch einen DKA (det. Keller-Automat) (Warum?)

Also sind die DEA-Sprachen eine echte Teilmenge der DKA-Sprachen.

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Satz (Myhill – Nerode):

L DEA-Sprache $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Satz (Myhill – Nerode):

L DEA-Sprache $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Bew: "$\Rightarrow$"

L DEA-Sprache $\Rightarrow \exists$ DEA $M=(Q,\Sigma,s,F,\Delta)$ mit $L(M)=L$

für $q \in Q$ sei $L_q = \{x \in \Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon)$ für irgendein $f \in F\}$

$\mathcal{F}_L = \{ L_q \mid q \in Q \}$ (plus möglicherweise $\{\}$) und $\mathcal{F}_L$ ist endlich.

Satz (Myhill – Nerode):

L DEA-Sprache $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Bew: "$\Leftarrow$"

$\mathcal{F}_L$ endlich. Definiere DEA $M = (\Sigma,Q,s,F,\Delta)$ mit

$Q = \mathcal{F}_L$
$s = F_L(\varepsilon) = L$
$F = \{ S \in \mathcal{F}_L \mid \varepsilon \in S \}$
$\Delta = \{ (F_L(w),a,F_L(wa)) \mid w \in \Sigma^*, a \in \Sigma \}$

Dann gilt

$$(F_L(x_1 \cdots x_k) , x_{k+1} \cdots x_n) \vdash_M (F_L(x_1 \cdots x_{k+1}) , x_{k+2} \cdots x_n)$$

und M akzeptiert genau L.