$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^*$: $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Satz (Myhill – Nerode):

L DEA-Sprache $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_L$ ist endlich

Konsequenz 1: Wenn Sprache L von einem NEA akzeptiert wird, dann wird L auch von einem DEA akzeptiert.

Beweis: L von NEA $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$ akzeptiert.

für $q \in Q$ sei $L_q = \{x \in \Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon)$ für irgendein $f \in F \}$

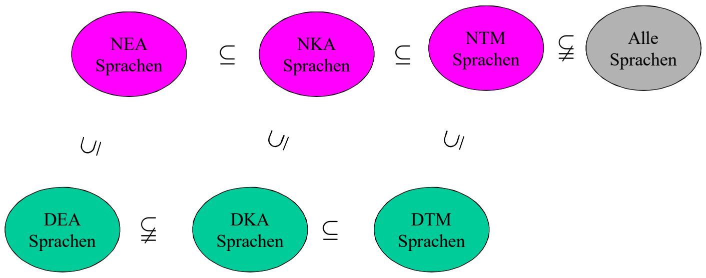
für $w \in \Sigma^*$ sei $Q(w) = \{ q \in Q \mid (s,w) \vdash_M^* (q,\varepsilon) \}$

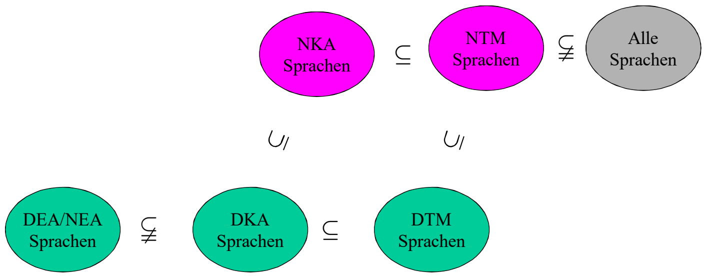
Dann gilt

$F_L(w) = \bigcup_{q \in Q(w)} L_q$

Damit ist $F_L(w)$ durch $Q(w) \subset Q$ eindeutig bestimmt. Aber Q hat nur endlich viele Teilmengen, also gibt es nur endlich viele verschiedene $F_L(w)$'s.

Also ist $\mathcal{F}_L$ endlich, und L wird daher von einem DEA akzeptiert.





Konstruktion eines DEA $M'=(\Sigma,Q',s',F',\Delta')$ äquivalent zu einem NEA $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$ (Potenzmengenkonstruktion)

$Q' = 2^Q$ $A\in 2^Q$ ... Menge der Zustände, in denen sich M zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden könnte.

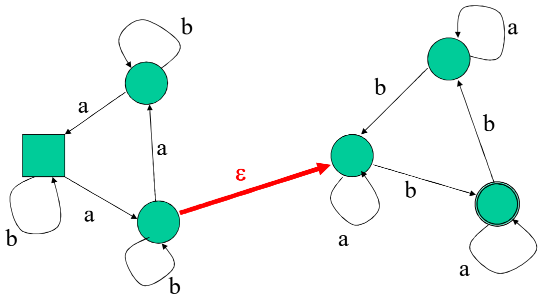
$s' = \{s\}$

$F' = \{ A\in 2^Q \mid A\cap F \neq \emptyset \}$

$\Delta' = \{ (P,a,R)\in Q'\times\Sigma\times Q' \mid R=\delta(P,a) \}$ with

$\delta(P,a) = \{ r\in Q \mid \exists\, p\in P : (p,a,r)\in\Delta \}$

Konsequenz 2: Automaten mit ε-Übergängen akzeptieren nur DEA-Sprachen



akzeptiert z.B. bab ε bbaabaaba = babbbaabaaba

Beweis analog zum Beweis von Konsequenz 1.

Konsequenz 3: (DEA Minimierung) Sei M ein DEA. Man kann effektiv einen DEA M' konstruieren, sodass $L(M')=L(M)$ und die Anzahl der Zustände von M ist minimal. Diese Konstruktion braucht nur Zeit polynomiell in der Beschreibungsgröße von M'.

Beweis: $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$

für $q\in Q$ sei $L_q = \{x\in\Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon)$ für irgendein $f\in F \}$

$\mathcal{F}_L = \{ L_q \mid q\in Q$ **mit q von s erreichbar**$\}$ (plus möglicherweise $\{\}$)

Idee: Betrachte Übergangsgraphen G_M

1) Eliminiere $q\in Q$, die nicht von s erreichbar von G_M
Vervollständige G_M, d.h. füge Knoten $\perp$ hinzu und für jedes $(q,a)\in (Q\cup\{\perp\})\times\Sigma$ ohne Übergangsregel füge Regel (Kante) $(q,a,\perp)$ hinzu.

2) Im neuen Graphen bestimme, für welche Knotenpaare $\{p,q\}$ gilt $L_p=L_q$. ($\Rightarrow$ Äquivalenzrelation auf den Knoten)

3) Aus den Äquivalenzklassen bilde den Minimalautomaten.

Algorithmus für Schritt 2:

Ziel: Berechne $U = \{ \{p,q\} \mid L_p \neq L_q \}$ unterscheidbare Paare
und $N = \{ \{p,q\} \mid L_p = L_q \}$ nicht unterscheidbare Paare

Sei $U_i \subseteq U$ die Menge aller Paare $\{p,q\}$ für die das kürzeste Wort, durch das sich L_p und L_q unterscheiden, Länge i hat. Dann gilt $U = \bigcup_{i \geq 0} U_i$

$U_0 := \{ \{p,q\} \mid p \in F$ und $q \in Q \setminus F \}$
$N := \{ \{p,q\} \mid p,q \in F$ oder $p,q \in Q \setminus F \}$

$i := 0$
while $U_i \neq \emptyset$ **do**
  $U_{i+1} := \emptyset$
  for each $\{p,q\} \in N$ für das $\exists \{p',q'\} \in U$ and $\exists a \in \Sigma$
    mit $(p,a,p') \in \Delta$ und $(q,a,q') \in \Delta$
   do verschiebe $\{p,q\}$ aus N nach U_{i+1}
  $i := i+1$

return N