Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$? Minimiere M und teste, ob es sich dann um den 1-Zustand DEA handelt, der alles akzeptiert.

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$? Minimiere M und teste, ob es sich dann um den 1-Zustand DEA handelt, der nichts akzeptiert.

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$? Minimiere M und M' und teste, ob die beiden sich ergebenden Übergangsgraphen "gleich" (isomorph) sind.

(iv) $L \subseteq L'$?

Eigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar
(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$? Teste, ob $L \cap L' = L$.
$L \cap L'$ ist auch eine reguläre Sprache.
(siehe nächsten Satz)

Abschlussigenschaften von DEA-Sprachen

Satz: Wenn L und L' DEA-Sprachen sind, dann sind auch folgende Sprachen DEA-Sprachen:

1) das Komplement von L
2) $L \cup L'$ und $L \cap L'$
3) $L \cdot L' = \{ xy \mid x \in L \text{ und } y \in L' \}$ (Konkatenation)
4) $L^R = \{ x^R \mid x \in L \}$ (Umkehrung)
5) $L^i = \{ x_1 x_2 \cdots x_i \mid x_1, x_2, \cdots, x_i \in L \}$ (für $i \in \mathbb{N}$)
6) $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ (Kleene Stern Operator)

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$

Beweisidee:

Jeder Pfad mit mindestens N Kanten in einem Graphen mit N Knoten hat eine Schleife.

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$

$\neg \big(\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L\big)$

$\Rightarrow \quad \neg$ (L DEA-Sprache)

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L$

$\neg \big(\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L\big)$

$\Rightarrow \quad \neg$ (L DEA-Sprache)

$\forall N \in \mathbb{N} : \exists x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\forall$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\exists i \in \mathbb{N} : uv^iw \notin L$

$\Rightarrow$ L ist **keine** DEA-Sprache

"Spiel" zum Zeigen, dass L keine DEA Sprache

1. Widersacher gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $x \in L$ mit $|x| \geq N$.
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $x = uvw$ vor mit $|uv| \leq N$, $|v|>0$.
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iw \notin L$.

$\forall N \in \mathbb{N} : \exists x \in L$ mit $|x| \geq N$: $\forall$ Unterteilung $x=uvw$ mit $|uv| \leq N$ und $|v|>0$: $\exists i \in \mathbb{N} : uv^iw \notin L$

$\Rightarrow$ L ist **keine** DEA-Sprache

Beispiel:

"Spiel" zum Zeigen, dass $L = \{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ keine DEA Sprache

1. Widersacher gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $x \in L$ mit $|x| \geq N$. $x = a^Nb^N$
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $x = uvw$ vor mit $|uv| \leq N$, $|v|>0$.

   uv besteht nur aus a's und $v=a^k$ mit $k>0$
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iw \notin L$.

   z.B. $i = 0$, weil dann $uv^iw = a^{N-k}b^N \notin L$