Reguläre Ausdrücke

Mechanismus zum Spezifizieren von Sprachen über Alphabet Σ

	Ausdruck	Bedeutung
	$\emptyset$	$[\![\emptyset]\!] = \{\}$
	ε	$[\![\varepsilon]\!] = \{\varepsilon\}$
$a \in \Sigma$	a	$[\![a]\!] = \{a\}$
r_1, r_2 reg. Ausdrücke		
	(r_1+r_2)	$[\![(r_1+r_2)]\!] = [\![r_1]\!] \cup [\![r_2]\!]$
	$r_1\, r_2$	$[\![r_1\, r_2]\!] = [\![r_1]\!] \cdot [\![r_2]\!]$
	$(r_1)^*$	$[\![(r_1)^*]\!] = [\![r_1]\!]^*$

Reguläre Ausdrücke

Mechanismus zum Spezifizieren von Sprachen über Alphabet Σ

	Ausdruck	Bedeutung
	$\emptyset$	$[\![\emptyset]\!] = \{\}$
	ε	$[\![\varepsilon]\!] = \{\varepsilon\}$
$a \in \Sigma$	a	$[\![a]\!] = \{a\}$
r_1, r_2 reg. Ausdrücke		
	(r_1+r_2)	$[\![(r_1+r_2)]\!] = [\![r_1]\!] \cup [\![r_2]\!]$
	$r_1\, r_2$	$[\![r_1\, r_2]\!] = [\![r_1]\!] \cdot [\![r_2]\!]$
	$(r_1)^*$	$[\![(r_1)^*]\!] = [\![r_1]\!]^*$

Beispiel: alle Strings über $\{a,b\}$ ohne zwei direkt aufeinanderfolgende a's

$b^*(abb^*)^*(a+\varepsilon)$ oder auch $(ab+b+\varepsilon)^*(a+\varepsilon)$

Reguläre Ausdrücke definieren genau die DEA-Sprachen.

Satz: $L = [\![r]\!]$ für einen regulären Ausdruck r genau dann, wenn
$L = L(M)$ für irgendeinen DEA M.

Deswegen heißen DEA-Sprachen üblicherweise *reguläre Sprachen*.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Idee: strukturelle Induktion; baue NEA mit ε-Übergängen

"$\Leftarrow$" Gegeben DEA $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$, Übergangsgraph G_M

$$Q = \{q_1,\cdots,q_n\},\ s = q_1,\ F = \{q_{j_1},\cdots,q_{j_f}\}$$

Für $0 \le k \le n$, $1 \le i,j \le n$ sei r^k_{ij} Ausdruck, der alle Beschriftungen von Pfaden in G_M beschreibt mit Anfangsknoten q_i, Endknoten q_j, und **internen** Knoten mit Index $\le k$.

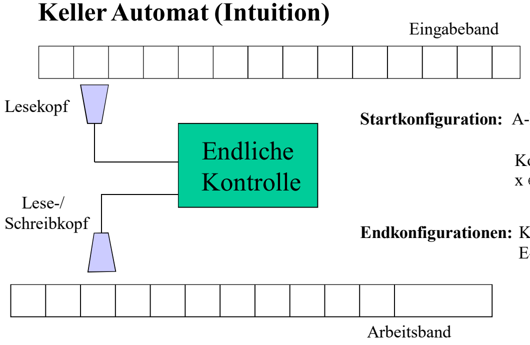
$$r^0_{ii} = \varepsilon + a_1 + \cdots a_t \quad \text{mit } (q_i,a_h,q_i) \in \Delta \text{ für } 1 \le h \le t$$

$i \ne j$: $$r^0_{ij} = a_1 + \cdots a_t \quad \text{mit } (q_i,a_h,q_j) \in \Delta \text{ für } 1 \le h \le t$$

$k>0$: $$r^k_{ij} = r^{k-1}_{ij} + r^{k-1}_{ik}(r^{k-1}_{kk})^*\, r^{k-1}_{kj}$$

$$L(M) = r^n_{1j_1} + r^n_{1j_2} + \cdots + r^n_{1j_f}$$

Keller Automat (Intuition)



Startkonfiguration: A-Band nur € auf linkester Zelle,
dort auch A-Kopf
Kontrolle in Startzustand
$x \in \Sigma^*$ auf E-Band, E-Kopf ganz links,

Endkonfigurationen: Kontrolle in einem Endzustand
E-Kopf ganz rechts

Rechenschrittregeln:

derzeitiger Zustand | gelesenes A-Symbol | gelesenes E-Symbol ⟶ schreibe auf A-Band | bewege E-Kopf nach rechts | neuer Zustand

Wenn A-Kopf nach links bewegt wird, hinterlässt er leere Zelle.

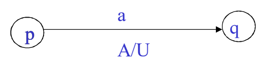
Formale Spezifikation von Kellerautomaten

Σ Eingabealphabet
Γ Kelleralphabet
$€\in\Gamma$ Kellerboden
Q Zustandsmenge (endlich)
$s\in Q$ Startzustand
$F\subset Q$ Endzustände
$\Delta \subset (Q\times\Gamma\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})) \times \Gamma^*\times Q$ Regeln (endlich)

derz. Zust. | derz. Keller-gipfel | konsumierte Eingabe | neuer Keller-gipfel | neuer Zustand

Konvention:
$a,b,c,.. \in \Sigma$ $A, B, C,... \in \Gamma$
$u,v,w,.. \in \Sigma^*$ $U, V, W,.. \in \Gamma^*$

$(p , A , a , U , q) \in \Delta$ notiert durch



Konfiguration: $\Gamma^* \times Q \times \Sigma^*$

Kellerinhalt Zustand Eingaberest

Rechenschrittrelation:

$(WA , p , aw) \vdash_M (WU, q , w)$ g.d.w. $(p,A,a,U,q) \in \Delta$
$(WA , p , aw) \vdash_M (WU, q, aw)$ g.d.w. $(p,A,\varepsilon,U,q) \in \Delta$

$A\in\Gamma$, $W,U\in\Gamma^*$, $a\in\Sigma$, $w\in\Sigma^*$

Rechenrelation:
$\vdash_M^*$ reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

Startkonfiguration für Eingabe x : $start_x = (€ , s , x)$

Endkonfigurationen: $Fin = \{ (W , F , \varepsilon) \mid W\in\Gamma^* , f\in F \}$
(Akzeptanz durch Endzustand)

$Fin_\varepsilon = \{ (\varepsilon , q , \varepsilon) \mid q\in Q \}$
(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$L(M) = \{ x\in\Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi\in Fin \}$

$L_\varepsilon(M) = \{ x\in\Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi\in Fin_\varepsilon \}$

Startkonfiguration für Eingabe x : $start_x = (\text{€}, s, x)$

Endkonfigurationen: $Fin = \{ (f, W, \varepsilon) \mid W \in \Gamma^*, f \in F \}$

(Akzeptanz durch Endzustand)

$Fin_\varepsilon = \{ (q, \varepsilon, \varepsilon) \mid q \in Q \}$

(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in Fin \}$

$L_\varepsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid start_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in Fin_\varepsilon \}$

Achtung: Um Wort x zu akzeptieren, muss das gesamte x konsumiert werden.

Konfiguration: $\Gamma^* \times Q \times \Sigma^*$

Kellerinhalt Zustand Eingaberest

Rechenschrittrelation:

$(WA, p, aw) \vdash_M (WU, q, w)$ g.d.w. $(p,A,a,U,q) \in \Delta$

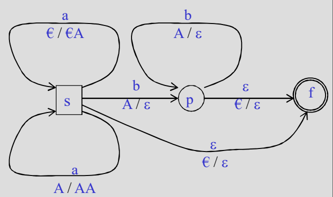
$(WA, p, aw) \vdash_M (WU, q, aw)$ g.d.w. $(p,A,\varepsilon,U,q) \in \Delta$

$A \in \Gamma,\ W,U \in \Gamma^*,\ a \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*$

Rechenrelation:

$\vdash_M^*$ reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

Bsp: NKA für $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$



Akzeptierende Berechnung für aabb

$\underbrace{(\text{€}, s, aabb)}_{start_{aabb}} \vdash_M^* (\text{€}A, s, abb) \vdash_M^* (\text{€}AA, s, bb) \vdash_M^* (\text{€}A, p, b) \vdash_M^* (\text{€}, p, \varepsilon) \vdash_M^* (\varepsilon, f, \varepsilon)$