Startkonfiguration für Eingabe x : $\text{start}_x = ($ € $, s , x)$

Endkonfigurationen: $\text{Fin} = \{ (W , f , \varepsilon) \mid W \in \Gamma^* , f \in F \}$

(Akzeptanz durch Endzustand)

$\text{Fin}_\varepsilon = \{ (\varepsilon , q , \varepsilon) \mid q \in Q \}$

(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin} \}$

$L_\varepsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin}_\varepsilon \}$

Satz: **L=L(M) für irgendeinen NKA M**

$\Leftrightarrow$

$L=L_\varepsilon(M')$ für irgendeinen NKA M'

“Äquivalenz von Akzeptanz durch Endzustand und
Akzeptanz durch leeren Keller.“

Def.: L heißt *NKA-Sprache* (oder *kontextfreie Sprache*),
wenn $L=L(M)$ oder $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA M.

Satz 0: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann
wird L auch von einem NKA M' durch gleichzeitigem
leeren Keller und Endzustand akzeptiert, bei dem dazu
noch alle Regeln in $\Delta' \subset Q' \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{\leq 2} \times Q'$ liegen,
also eine der folgenden drei Formen haben:

$(p , A , a' , \varepsilon , q)$ ("pop the stack")

(p , A , a' , B , q) (ändere die Kellerspitze)

$(p , A , a' , A'B , q)$ ("push B")

mit $a' \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann
wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert,

der **nur einen Zustand** besitzt und

bei dem dazu noch wie in Satz 0 alle Regeln
in $\Delta' \subset Q' \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{\leq 2} \times Q'$ liegen,
also eine der folgenden drei Formen haben:

$(p , A , a' , \varepsilon , p)$ ("pop the stack")

(p , A , a' , B , p) (ändere die Kellerspitze)

$(p , A , a' , A'B , p)$ ("push B")

mit $a' \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ und $Q=\{p\}$.

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert,

der **nur einen Zustand** besitzt und

bei dem dazu noch wie in Satz 0 alle Regeln in $\Delta' \subset Q' \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^{\leq 2} \times Q'$ liegen, also eine der folgenden drei Formen haben:

$(p, A, a', \varepsilon, p)$ ("pop the stack")

(p, A, a', B, p) (ändere die Kellerspitze)

$(p, A, a', A'B, p)$ ("push B")

mit $a' \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ und $Q=\{p\}$.

Beachte: Man kann M' auch als NKA **ohne Zustand** auffassen.

Satz: Wird eine Sprache L von einem NKA M akzeptiert, dann wird L auch von einem NKA M' durch leeren Keller akzeptiert, wobei M' nur **einen Zustand** besitzt….

Beweisidee: Sei M ein NKA für L so wie in Satz 0 angegeben.
Lasse M' den NKA M nicht-deterministisch simulieren

Der Zustand von M wird auf dem Keller von M' gespeichert

Instanz von A auf Keller von M wird realisiert als

(q',A,q) auf Keller von M' mit der Bedeutung:

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Beweisidee: Lasse M' den NKA M nicht-deterministisch simulieren

Der Zustand von M wird auf dem Keller von M' gespeichert

Instanz von A auf Keller von M wird realisiert als

(q',A,q) auf Keller von M' mit der Bedeutung:

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Kellerinhalt von M im Zustand q $A_1 A_2 A_3 \cdots A_k$

entspricht

Kellerinhalt von M' $(p_0,A_1,p_1)\,(p_1,A_2,p_2)\,(p_2,A_3,p_3) \cdots (p_{k-1},A_k,q)$

für geignete (nicht-deterministisch gewählte) Zustände $p_0,p_1,p_2 \cdots p_{k-1}$

Wenn diese Instanz das nächste Mal oberstes Kellersymbol ist,
dann ist M in Zustand q,
und wenn das Kellersymbol unter dieser Instanz betrachtet wird,
dann ist M im Zustand q'.

Kellerinhalt von M im Zustand q $A_1 A_2 A_3 \cdots A_k$ entspricht

Kellerinhalt von M' $(p_0,A_1,p_1)\,(p_1,A_2,p_2)\,(p_2,A_3,p_3) \cdots (p_{k-1},A_k,q)$

für geignete (nicht-deterministisch gewählte) Zustände $p_0,p_1,p_2 \cdots p_{k-1}$

M (wie in Satz 0) $\Sigma,\ \Gamma,\ €,\ Q,\ s,\ F,\ \Delta$

M': $\Sigma,\ \Gamma' = Q\times\Gamma\times Q,\ €' = (f,€,s),\ Q'=\{s'\},\ s',\ F'=\{s'\},\ \Delta' \subset Q'\times\Gamma'\times\Sigma^{\leq 1}\times\Gamma'^{\leq 2}\times Q'$

$(q,A,a,B,p) \in \Delta \quad \rightarrow \quad (s',(r,A,q),a,(r,B,p),s') \in \Delta'$ für jedes $r \in Q$

$(q,A,a,\varepsilon,p) \in \Delta \quad \rightarrow \quad (s',(p,A,q),a,\varepsilon,s') \in \Delta'$

$(q,A,a,A'B,p) \in \Delta \quad \rightarrow \quad (s',(r,A,q),a,(r,A',t)(t,B,p),s') \in \Delta'$ für jedes $r,t \in Q$

Behauptung: M' akzeptiert genau die gleiche Sprache wie M

Pumping Lemma für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache ⇒

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$

$\neg\big(\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\exists$ Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L\big)$

⇒ ¬ (L NKA-Sprache)

$\forall N \in \mathbb{N} : \exists z \in L$ mit $|z| \geq N$: $\forall$ Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$: $\exists i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \notin L$

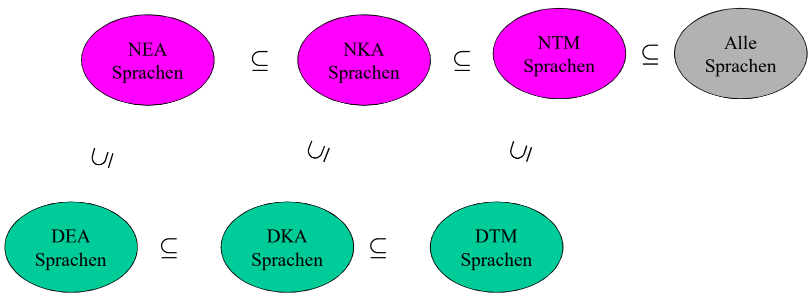
⇒ L ist **keine** NKA-Sprache

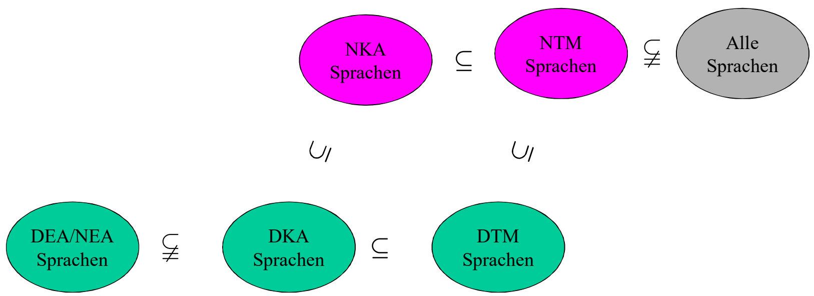
"Spiel" zum Zeigen, dass L keine NKA Sprache

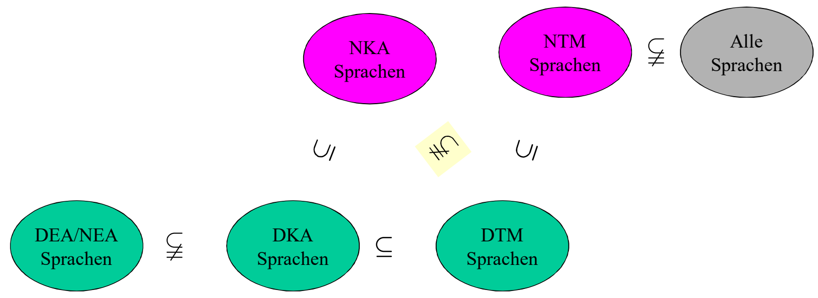
1. Widersacher gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $z \in L$ mit $|z| \geq N$.
3. Widersacher gibt eine Unterteilung $z = uvwxy$ vor mit $|vwx| \leq N$, $|vx| > 0$.
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iwx^iy \notin L$.

Bsp: $L_{abc} = \{ a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist KEINE NKA-Sprache

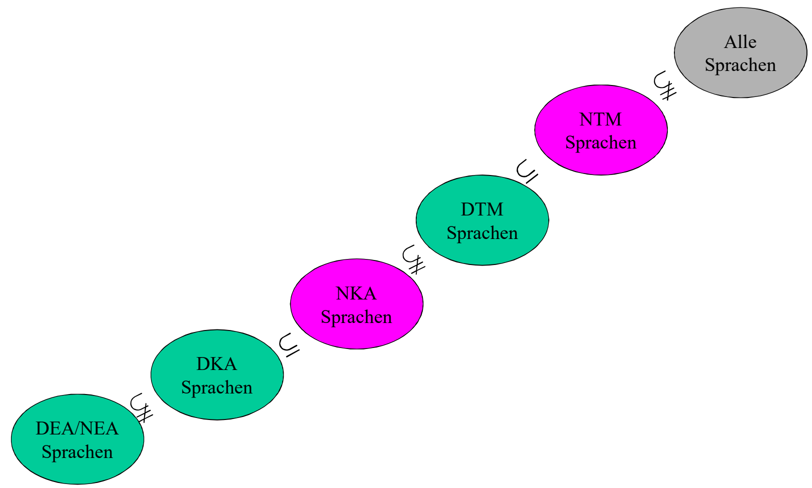
Bew: In 2. wähle $z = a^Nb^Nc^N$
Ganz gleich wie der Widersacher in 3. wählt, vwx enthält keine a's oder keine c's
In 4. wähle dann i=0; uwy enhält dann zu viele a's oder zu viele c's







L_{abc} ist nicht NKA-Sprache, aber DTM-Sprache.



Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Beweis von 3): $L = \{ a^k b^k c^m \mid k,m \in \mathbb{N} \}$ ist NKA-Sprache
$L' = \{ a^m b^n c^n \mid m,n \in \mathbb{N} \}$ ist NKA-Sprache

$L \cap L' = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \} = L_{abc}$ ist nicht NKA-Sprache.

Satz: Seien L und L' NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) und sei R eine reguläre Sprache. Es gilt:

1) $L \cup L'$ ist NKA-Sprache
2) $L \cap R$ ist NKA-Sprache
3) $L \cap L'$ ist nicht unbedingt NKA-Sprache
4) Das Komplement von L ist nicht unbedingt NKA-Sprache.

Beweis von 4): Sei L das Komplement von L_{abc}.

Überlege, dass L eine NKA-Sprache ist.

Aber das Komplement von L ist L_{abc} , und das ist keine NKA-Sprache.