Definition: Deterministischer Kellerautomat (DKA)

M ist ein DKA, wenn in jeder "Situation" höchstens eine Rechenschrittregel anwendbar ist, also:

$(p,a,A,U,q) \in \Delta$ und $(p,a,A,U',q') \in \Delta \Rightarrow (q,U)=(q',U')$

und $(p,A,\varepsilon,U,q) \in \Delta \Rightarrow \nexists (a,q',U')$ mit $(p,A,a,U',q') \in \Delta$

L ist eine DKA Sprache, wenn es einen DKA M gibt mit $L(M)=L$.
(Also Akzeptanz durch Endzustand)

Achtung: Es gibt DKA-Sprachen L mit $L \neq L_\varepsilon(M)$ für alle DKA M (die mit Endzustand akzeptieren). Bsp: $L=\{a\}^*$

Satz: DKA-Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine DKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L auf jeden Fall eine DKA Sprache.

Beweis:
Idee: Baue aus DKA M für L, einen DKA M' für das Komplement von L
(durch Vertauschung von End- und Nicht-Endzuständen).

Details: 1) fehlende Übergänge
2) Endlosschleifen von ε-Übergängen
3) Folgen von ε-Übergängen durch End- und Nicht-Endzuständen nach Konsum der gesamten Eingabe.

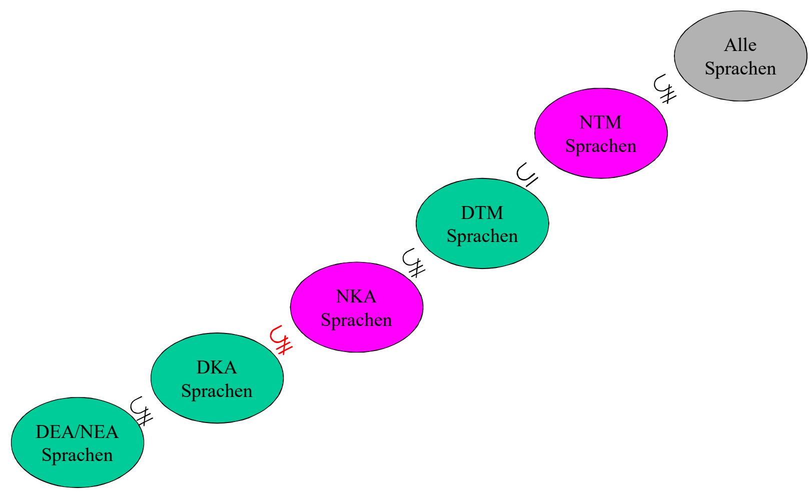
Satz: NKA-Sprachen (kontextfreie Sprachen) sind unter Komplementbildung **nicht** abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine NKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L nicht unbedingt eine NKA Sprache.

Satz: DKA-Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Das heißt,
wenn L eine DKA-Sprache ist, dann ist das Komplement von L auf jeden Fall eine DKA Sprache.

Kor: DKA-Sprachen sind eine echte Teilmenge der NKA-Sprachen.



Grammatik alternativer Sprachspezifikationsmechanismus

$G = (\Sigma, V, S, P)$

- Σ Terminalalphabet
- V Variablen- (Nicht-terminal) –alphabet
- $S \in V$ Startvariable
- $P \subset FVF \times F$ "Produktionen" ($F = (\Sigma \cup V)^*$)

Σ, V, S, P müssen endlich sein

$(\alpha, \beta) \in P$ wird geschrieben als $\alpha \to \beta$

Grammatik alternativer Sprachspezifikationsmechanismus

$G = (\Sigma, V, S, P)$

- Σ Terminalalphabet
- V Variablen- (Nicht-terminal) –alphabet
- $S \in V$ Startvariable
- $P \subset FVF \times F$ "Produktionen" ($F = (\Sigma \cup V)^*$)

Σ, V, S, P müssen endlich sein

$(\alpha, \beta) \in P$ wird geschrieben als $\alpha \to \beta$

G induziert Ableitungsschritt-Relation (Derivationsschritt-Relation) $\Rightarrow_G$ auf F durch $\gamma\alpha\gamma' \Rightarrow_G \gamma\beta\gamma'$ wenn $\alpha \to \beta$ Produktion in P

(also, Teilstring α kann durch β ersetzt werden)

$\Rightarrow_G^*$ reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow_G$: Ableitungsrelation (Derivationsrelation) auf F

G induziert Ableitungsschritt-Relation (Derivationsschritt-Relation) $\Rightarrow_G$ auf F durch $\gamma\alpha\gamma' \Rightarrow_G \gamma\beta\gamma'$ wenn $\alpha \to \beta$ Produktion in P

$\Rightarrow_G^*$ reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow_G$: Ableitungsrelation (Derivationsrelation) auf F

Die von G generierte Sprache

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}$$

Beispiel: $G = (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma = \{a,b\}$, $V = \{S,A,B,C\}$ und

$P = \{ S \to SABC,\ S \to \varepsilon,$
$SA \to a,\ BA \to AB,\ CA \to AC,\ CB \to BC,$
$aA \to aa,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc \}$

Beispielableitung:

$\underline{S} \Rightarrow_G SABC \Rightarrow_G \underline{SA}BCABC \Rightarrow_G aB\underline{CA}BC \Rightarrow_G a\underline{BA}CBC \Rightarrow_G$

$\underline{aA}BCBC \Rightarrow_G aaB\underline{CB}C \Rightarrow_G aa\underline{aB}BCC \Rightarrow_G$

$aa\underline{bB}CC \Rightarrow_G aab\underline{bC}C \Rightarrow_G aabb\underline{cC} \Rightarrow_G aabbcc$

Beispiel: $G = (\Sigma,V,S,P)$ mit $\Sigma=\{a,b\}$, $V=\{S,A,B,C\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{\ & S\to SABC\ ,\ S\to\varepsilon\ ,\\
& SA\to a\ ,\ BA\to AB\ ,\ CA\to AC\ ,\ CB\to BC\ ,\\
& aA\to aa\ ,\ aB\to ab\ ,\ bB\to bb\ ,\ bC\to bc\ ,\ cC\to cc\ \}
\end{aligned}
$$

Behauptung: $L(G) = \{\ a^n b^n c^n \mid n\in\mathbb{N}\ \}$

Beweis: “$\subseteq$”

Zeige dass nach jedem Ableitungsschritt folgende drei Aussagen für den abgeleiteten String u gelten:

(i) $\#_a(u)+\#_A(u) \;=\; \#_b(u)+\#_B(u) \;=\; \#_c(u)+\#_C(u)$

(ii) Die Kleinbuchstaben in u bilden einen Präfix von u

(iii) Kein b kommt vor einem a, kein c kommt vor einem b

Wenn nur mehr Kleinbuchstaben übrig sind, hat u die gewünschte Form $a^n b^n c^n$

Beweis: “”

Induktion

Beispiel: $G = (\Sigma,V,S,P)$ mit $\Sigma=\{a,b\}$, $V=\{S,L,R\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{\ & S\to aLbc\ ,\ S\to\varepsilon\ ,\\
& aL\to aabR\ ,\ Rb\to bR\ ,\ Rc\to Lcc\ ,\\
& bL\to Lb\ ,\ L\to\varepsilon\ \}
\end{aligned}
$$

Beispielableitung:

$$
\begin{aligned}
\underline{S} &\Rightarrow_G aLbc \Rightarrow_G aab\underline{R}\underline{b}c \Rightarrow_G aabb\underline{R}\underline{c} \Rightarrow_G aab\underline{b}\underline{L}cc \Rightarrow_G\\
& aa\underline{b}\underline{L}bcc \Rightarrow_G a\underline{a}\underline{L}bbcc \Rightarrow_G aaab\underline{R}\underline{b}bcc \Rightarrow_G\\
& aaabb\underline{R}\underline{b}cc \Rightarrow_G aaabbb\underline{R}\underline{c}c \Rightarrow_G aaabbb\underline{L}ccc \Rightarrow_G aaabbbccc
\end{aligned}
$$

Beispiel: $G = (\Sigma,V,S,P)$ mit $\Sigma=\{a,b\}$, $V=\{S,L,R\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{\ & S\to aLbc\ ,\ S\to\varepsilon\ ,\\
& aL\to aabR\ ,\ Rb\to bR\ ,\ Rc\to Lcc\ ,\\
& bL\to Lb\ ,\ L\to\varepsilon\ \}
\end{aligned}
$$

Behauptung: $L(G) = \{\ a^n b^n c^n \mid n\in\mathbb{N}\ \}$

Beweis: “$\subseteq$”

Jeder aus S abgeleitete String hat einer der folgenden 4 Formen für irgendein $n>0$ und irgendein $0\leq i\leq n$:

ε , $a^n b^i R b^{n-i} c^{n-1}$, $a^n b^i L b^{n-i} c^n$, $a^n b^n c^n$

(Anwendung von Regeln aus P auf einen String aus diesen 4 Klassen ergibt immer einen String aus diesen 4 Klassen.)

Beweis: “”

Zeige durch Induktion, dass aus S jeder String der Form $a^n L b^n c^n$ abgeleitet werden kann (und daher auch $a^n b^n c^n$).