Grammatik alternativer Sprachspezifikationsmechanismus

$G = (\Sigma, V, S, P)$

Σ	Terminalalphabet
V	Variablen- (Nicht-terminal) –alphabet
$S \in V$	Startvariable
$P \subset FVF \times F$	"Produktionen" ($F = (\Sigma \cup V)^*$)

Σ, V, S, P müssen endlich sein
$(\alpha,\beta) \in P$ wird geschrieben als $\alpha \rightarrow \beta$

G induziert Ableitungsschritt-Relation (Derivationsschritt-Relation)
$\Rightarrow_G$ auf F durch $\gamma\alpha\gamma' \Rightarrow_G \gamma\beta\gamma'$ wenn $\alpha \rightarrow \beta$ Produktion in P

(also, Teilstring α kann durch β ersetzt werden)

$\Rightarrow_G^*$ reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow_G$: Ableitungsrelation (Derivationsrelation) auf F

Die von G generierte Sprache

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}$$

Chomsky Hierarchie für Grammatiken und Sprachen

Typ 0 (unbeschränkt)

Typ 1 (kontextsensitiv)
nur Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$
(außer $S \rightarrow \varepsilon$, aber dann S auf keiner rechten Seite einer Regel)

Typ 2 (kontextfrei)
nur Regeln $A \rightarrow \alpha$ mit $A \in V$

Typ 3 (rechtslinear)
nur Regeln $A \rightarrow uB$, $A \rightarrow u$, $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A,B \in V$ und $u \in \Sigma$

Chomsky Hierarchie für Grammatiken und Sprachen

Typ 0 (unbeschränkt)

Typ 1 (kontextsensitiv)
nur Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$
(außer $S \rightarrow \varepsilon$, aber dann S auf keiner rechten Seite einer Regel)

Typ 2 (kontextfrei)
nur Regeln $A \rightarrow \alpha$ mit $A \in V$

Typ 3 (rechtslinear)
nur Regeln $A \rightarrow uB$, $A \rightarrow u$, $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A,B \in V$ und $u \in \Sigma$

Anmerkung: Bei kontextfreien und rechtslinearen Grammatiken können Regeln der Form $A \rightarrow \varepsilon$ zugelassen werden, weil sie leicht entfernt werden können (abgesehen von $S \rightarrow \varepsilon$)

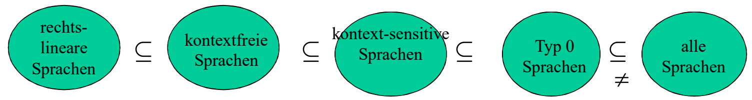
Chomsky Hierarchie für Grammatiken und Sprachen

Typ 0 (unbeschränkt)

Typ 1 (kontextsensitiv)
nur Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$
(außer $S \rightarrow \varepsilon$, aber dann S auf keiner rechten Seite einer Regel)

Typ 2 (kontextfrei)
nur Regeln $A \rightarrow \alpha$ mit $A \in V$

Typ 3 (rechtslinear)
nur Regeln $A \rightarrow uB$, $A \rightarrow u$, $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A,B \in V$ und $u \in \Sigma$



Satz: Die rechtslinearen Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

Beweis:

1) L rechtslinear $\Rightarrow$ L regulär

   Idee: zeige, dass L nur endlich viele Fortsetzungssprachen hat

2) L regulär $\Rightarrow$ L rechtslinear

   L regulär $\Rightarrow$ $L=L(M)$ für DEA $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$

   Betrachte Grammatik $G = (\Sigma,Q,s,P)$ mit

   $$P = \{\, p \to uq \mid (p,u,q) \in \Delta \,\} \cup \{\, p \to \varepsilon \mid p \in F \,\}$$

Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Bsp: kfG für geklammerte arithmetische Ausdrücke über Binärzahlen und Variablennamen über $\{a,b\}^*$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

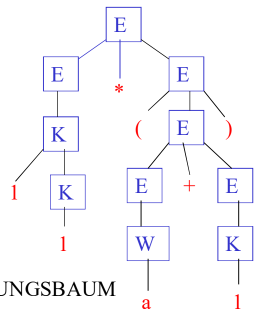
$11*(a+1) \in L(G)$ $\qquad$ $(a+b)(a+1) \notin L(G)$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

$\underline{E} \Rightarrow E*\underline{E} \Rightarrow E*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}*(E+E)$
$\Rightarrow K*(\underline{E}+E) \Rightarrow K*(W+\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}*(W+K)$
$\Rightarrow 11*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11*(\underline{W}+1)$
$\Rightarrow 11*(a+1)$

$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$
$V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

$\underline{E} \Rightarrow E*\underline{E} \Rightarrow E*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}*(E+E)$
$\Rightarrow K*(\underline{E}+E) \Rightarrow K*(W+\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}*(W+K)$
$\Rightarrow 11*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11*(\underline{W}+1)$
$\Rightarrow 11*(a+1)$



ABLEITUNGSBAUM

Ableitungsbaum:

geordneter Baum mit Knotenbeschriftung aus $\Sigma \cup V \cup \{\varepsilon\}$

Knoten N beschriftet mit $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ hat keine Kinder

Knoten N beschriftet mit $y \in V$ und mit Kindern $N_1,\cdots,N_k$ beschriftet mit $x_1,\cdots,x_k$ nur möglich, wenn $y \to x_1x_2\cdots x_k$ eine Produktionsregel

Wurzelbeschriftung A und Blätterbeschriftung $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ genau dann möglich wenn $A \Rightarrow^* \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$

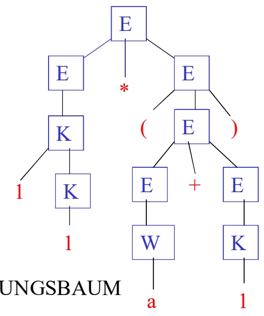
$G = (\Sigma,V,E,P)$ mit $\Sigma = \{a,b,0,1,(,),*,+\}$ $V=\{E,K,W\}$
und Produktionen P: $E \to E+E \mid E*E \mid (E) \mid K \mid W$
$W \to aW \mid bW \mid a \mid b$
$K \to 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

Bsp: Ableitung von $11*(a+1)$

$\underline{E} \Rightarrow E*\underline{E} \Rightarrow E*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}*(E+E)$
$\Rightarrow K*(\underline{E}+E) \Rightarrow K*(W+\underline{E})$
$\Rightarrow \underline{K}*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}*(W+K)$
$\Rightarrow 11*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11*(\underline{W}+1)$
$\Rightarrow 11*(a+1)$

Bsp: Linksableitung von $11*(a+1)$

$\underline{E} \Rightarrow \underline{E}*E \Rightarrow \underline{K}*E \Rightarrow 1\underline{K}*E$
$\Rightarrow 10*\underline{E} \Rightarrow 10*(\underline{E})$
$\Rightarrow 10*(\underline{E}+E) \Rightarrow 10*(\underline{W}+E)$
$\Rightarrow 11*(a+\underline{E}) \Rightarrow 11*(a+\underline{K})$
$\Rightarrow 11*(a+1)$



ABLEITUNGSBAUM

Linksableitung entspricht Präordertraversierung des Ableitungsbaums

Lemma: $G = (\Sigma,V,S,P)$ kontextfreie Grammatik, $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$

$\exists$ Ableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Linksableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Ableitungsbaum mit Wurzelbeschriftung S und mit α als Blätterbeschriftung