Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen

Gegeben kfG $G = (\Sigma,V,S,P)$ in Chomsky-Normalform und $x\in\Sigma^*$, entscheide deterministisch, ob $x\in L(G)$.

$x=x_0x_1\cdots x_{n-1}$ $\quad x[i:j] = x_i\cdots x_{j-1}$ $\quad V[i:j] = \{ A\in V \mid A \Rightarrow_G^* x[i:j] \}$

Idee: Berechne $V[0:n]$ und teste, ob $S\in V[0:n]$

7.12.2016 1

Gegeben kfG $G = (\Sigma,V,S,P)$ in Chomsky-Normalform und $x\in\Sigma^*$, entscheide deterministisch, ob $x\in L(G)$.

$x=x_0x_1\cdots x_{n-1}$ $\quad x[i:j] = x_i\cdots x_{j-1}$ $\quad V[i:j] = \{ A\in V \mid A \Rightarrow_G^* x[i:j] \}$

Idee: Berechne $V[0:n]$ und teste, ob $S\in V[0:n]$

for $0\le i<n$ **do** $V[i:i+1] = \{ A\in V \mid A\to x_i \in P \}$

for $2\le m\le n$ **do**
  for $0\le i\le n-m$ **do**
    $V[i:i+m] = \bigcup_{0<j<m} \{ A\in V \mid A\to BC \text{ und } B\in V[i:i+j], C\in V[i+j:i+m] \}$

Laufzeit $O(n^3)$, wenn n groß und G konstant.

7.12.2016 2

Das Wortproblem für Typ 0 Sprachen

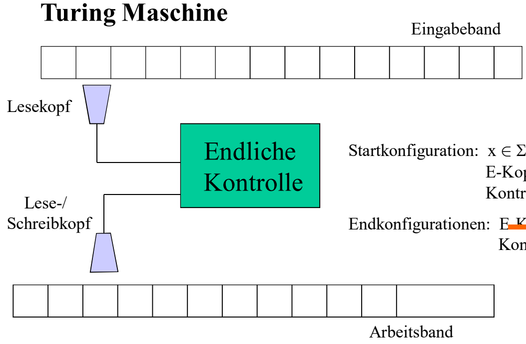
Gegeben allemeine Grammatik $G = (\Sigma,V,S,P)$ und $x\in\Sigma^*$, entscheide,

ob $x\in L(G)$.

???????

7.12.2016 3

Turing Maschine



Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf E-Band, nichts auf A-Band
E-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

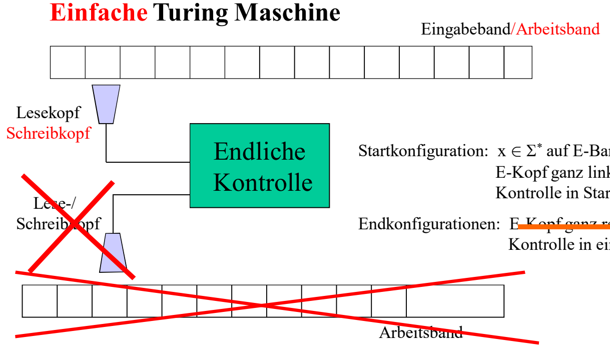
Endkonfigurationen: ~~E-Kopf ganz rechts~~
Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand	gelesenes E-Symbol	gelesenes A-Symbol	→	neuer Zustand	E-Kopf nach rechts	schreibe A-Symbol	bewege A-Kopf

7.12.2016 4

Einfache Turing Maschine



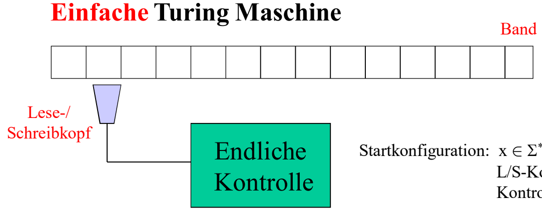
Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf E-Band, ~~nichts auf A-Band~~
E-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

Endkonfigurationen: ~~E-Kopf ganz rechts~~
Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand | gelesenes ~~E-~~Symbol | ~~gelesenes A-Symbol~~ → neuer Zustand | ~~E-Kopf nach rechts~~ | schreibe ~~A-~~Symbol | bewege A-Kopf

Einfache Turing Maschine



Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf Band
L/S-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

Endkonfigurationen: Kontrolle in einem Endzustand

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand | gelesenes Symbol → neuer Zustand | schreibe Symbol | bewege L/S-Kopf

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Σ	Eingabealphabet
$\Gamma \supset \Sigma$	Bandalphabet
$\# \in \Gamma \setminus \Sigma$	Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände
$\Delta \subset (Q\times\Gamma) \times (Q\times\Gamma\times\{L,B,R\})$	Rechenschrittregeln

derzeitiger Zustand, derzeitig gelesenes Symbol, neuer Zustand, geschriebenes Symbol, Kopfbewegung
L = links R = rechts
B = bleibe

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Konfigurationsraum für M: $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1A_2\cdots A_{i-1}\, q\, A_i \cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1\cdots A_n$
Zustand ist q
S/L-Kopf über A_i

Achtung: nocht nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x \in \Sigma^+$: $init(x) = s\,x$
für $x \in \Sigma^0$: $init(\varepsilon) = s\,\#$

Endkonfigurationen: $\Phi = \Gamma^* F \Gamma^+$

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$

Konfigurationsraum für M: $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1A_2 \cdots A_{i-1}\ q\ A_i \cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1 \cdots A_n$
Zustand ist q
S/L-Kopf über A_i

Achtung: nocht nicht benutzte Bandzellen sind in Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x \in \Sigma^+$: $\mathrm{init}(x) = s\ x$
für $x \in \Sigma^0$: $\mathrm{init}(\varepsilon) = s\ \#$

Alternative Endkonfigurationen: $\Phi_\varepsilon = \#^* F \#^+$ Am Ende Bandinhalt löschen

Rechenschrittrelation $\vdash_M$ auf K_M

$A_1A_2 \cdots A_{i-1}\ p\ A_iA_{i+1} \cdots A_n \vdash_M A_1A_2 \cdots A_{i-1}\ q\ CA_{i+1} \cdots A_n$ g.d.w $(p,A_i,q,C,B) \in \Delta$

$A_1A_2 \cdots A_{i-1}\ p\ A_i \cdots A_n \vdash_M A_1A_2 \cdots\ q\ A_{i-1}CA_{i+1} \cdots A_n$ g.d.w $(p,A_i,q,C,L) \in \Delta$

$A_1A_2 \cdots A_{i-1}\ p\ A_iA_{i+1}A_n \vdash_M A_1A_2 \cdots A_{i-1}C\ q\ A_{i+1} \cdots A_n$ g.d.w $(p,A_i,q,C,R) \in \Delta$

Rechenschrittrelation $\vdash_M$ auf K_M

(neue Bandzellen werden zum ersten Mal benutzt)

$p\ A_1A_2 \cdots A_n \vdash_M q\ \#CA_2 \cdots A_n$ g.d.w $(p,A_1,q,C,L) \in \Delta$

$A_1 \cdots A_{n-1}\ p\ A_n \vdash_M A_1 \cdots A_{n-1}C\ q\ \#$ g.d.w $(p,A_n,q,C,R) \in \Delta$

Rechenrelation $\vdash_M^*$ auf K_M: reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

TM M akzeptiert Eingabe $x \in \Sigma^*$

g.d.w.

$\mathrm{init}(x) \vdash_M^* \phi$ für irgendein $\phi \in \Phi$

$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x \}$

Satz: L Sprache
$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$ $\Leftrightarrow$ $L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma,V,S,P)$

Beweisidee:
Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

$$\cdots\ k_i \ \vdash_M \ k_{i+1} \ \vdash_M \ k_{i+2} \ \vdash_M \ \cdots$$

$$\cdots\ k_i \ {}_G\!\Leftarrow \ k_{i+1} \ {}_G\!\Leftarrow \ k_{i+2} \ {}_G\!\Leftarrow \ \cdots$$

Satz: L Sprache
$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$ $\Leftrightarrow$ $L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma,V,S,P)$

Beweis: "⇒"
Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

neuer Startzustand

$$s'x \ \vdash_M \ s\,x \vdash_M \cdots \vdash_M k_i \ \vdash_M \cdots \vdash_M \ X f Y$$

$$x \ {}_G\!\Leftarrow s'x \ {}_G\!\Leftarrow s\,x \ {}_G\!\Leftarrow \cdots {}_G\!\Leftarrow k_i \ {}_G\!\Leftarrow \cdots {}_G\!\Leftarrow \ X f Y \ \ {}^{*}_{G}\!\Leftarrow \ f \ {}_G\!\Leftarrow \ S$$

Satz: L Sprache
$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma,\Gamma,\#,Q,s,F,\Delta)$ $\Leftrightarrow$ $L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma,V,S,P)$

Beweis: "⇐"
Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

Produktionsanwendungen werden nichtdeterministisch rückgängig gemacht.

$$x \ {}_G\!\Leftarrow \cdots {}_G\!\Leftarrow \ U \ {}_G\!\Leftarrow \ V \ {}_G\!\Leftarrow \cdots {}_G\!\Leftarrow \ S$$

$$s\,x \vdash_M s\,x \vdash_M^* \cdots \vdash_M^* \ s\,U \ \vdash_M^* s\,V \ \vdash_M^* \cdots \vdash_M^* \ sS \vdash_M^* f\#$$