Ein alternativer Rechenmechanismus: Register Maschinen

k-Register Maschine:
Speicher: $x_1, \cdots, x_k$ k "Register", jeder speichert eine natürliche Zahl

Operationen: $x_i = x_j$ op x_k mit op $\in \{ +, \dot{-}, *$ div , mod $\}$

$x_i = x_j$ op c
$x_i = c$

$a \dot{-} b = \max\{a-b,0\}$
a div $b = \lfloor a/b \rfloor$

(tunix) c Konstante

Prädikate: $x_i =? \ 0$

mit der üblichen Semantik

Programm: endliche Menge von Befehlen folgender Form

Label: Operation **goto** Label

Label: **if** Prädikat **then** Operation **goto** Label
else Operation **goto** Label

mit der üblichen Semantik

Es gibt zwei besondere Label: *Start, Halt*

Ein Programm Π berechnet Funktion $f_\Pi: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$

Registerinhalte
vor der Durchführung von Π: $x_1=a_1, \cdots x_m=a_m, x_{m+1}=0 \cdots x_k=0$
nach der Durchführung von Π: $x_1=b_1, \cdots x_m=b_n$

$$f_\Pi(a_1,\cdots,a_m) = (b_1,\cdots,b_n)$$

Additive Register Maschinen

k-Register Maschine:
Speicher: $x_1, \cdots, x_k$ k "Register", jeder speichert eine natürliche Zahl

Operationen: $x_i = x_j$ op x_k mit op $\in \{ +, \dot{-}, $ ~~$*$, div, mod~~ $\}$

$x_i = x_j$ op c
$x_i = c$

$a \dot{-} b = \max\{a-b,0\}$
~~a div $b = \lfloor a/b \rfloor$~~

(tunix) c Konstante

Prädikate: $x_i =? \ 0$

mit der üblichen Semantik

Einfache k-Register-Maschinen

Speicher: $x_1, \cdots, x_k$ k "Register", jeder speichert eine natürliche Zahl

Operationen: $x_i = x_i + 1$ (inkrementieren)
$x_i = x_i \dot{-} 1$ (dekrementieren)

(tunix)

Prädikate: $x_i =? \ 0$

mit der üblichen Semantik

"Satz:" Alles, was von einer k-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **additiven** (k+3)-Register-Maschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer **additiven** m-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **einfachen** (m+3)-Register-Maschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer **einfachen** k-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **einfachen** 2-Register-Maschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer k-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **additiven** (k+3)-Register-Maschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer **additiven** m-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **einfachen** (m+3)-Register-Maschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer **einfachen** k-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer **einfachen** 2-Register-Maschine berechnet werden.

Das gilt alles modulo geeigneter Kodierungen der Ein- und Ausgabe.

"Satz:" Alles, was von einer **einfachen** 2-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer Turingmaschine berechnet werden.

Das gilt modulo geeigneter Kodierungen der Ein- und Ausgabe.

Beweisidee: schrittweise Simulation von Registermaschinenprogramm Π durch Turingmaschine M_Π

Registerinhalte $x_1 = s$, $x_2 = t$ dargestellt durch Bandinhalt $a^s\$a^t$

"Satz:" Alles, was von einer Turingmaschine berechnet werden kann, kann auch von einer 3-Register-Maschine berechnet werden.

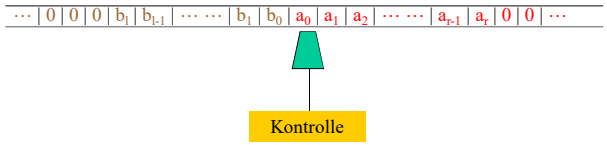
Genauer Satz: Es sei $M = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, 0, \Delta)$ eine TM, mit $\Gamma = \{ 0 , \cdots , t\text{-}1\}$, die bei Eingabe $w \in \Sigma^*$, falls sie hält, dies mit Bandinhalt $f_M(w) \in \Gamma^*$ und Kopf auf dem linken Ende des Bandinhaltes tut.

Es gibt eine Program Π_M für eine 3-Register-Maschine, das bei Eingabe $\langle w \rangle_t$ genau dann hält, wenn M dies bei Eingabe w tut, und die als Ausgabe $\langle f_M(w) \rangle_t$ berechnet.

$$\langle a_0 a_1 \cdots a_n \rangle_t = \sum_{0 \le i \le n} a_i t^i$$

Beweisidee: schrittweise Simulation von M durch Π_M

Konfiguration von M:



Entsprechende Register-Inhalte der 3-Register-Maschine :

$x_0 = \langle a_0 a_1 \cdots a_r \rangle_t$

$x_1 = \langle b_0 b_1 \cdots b_l \rangle_t$

x_3 für Zwischenergebnisse

"Satz:" Alles, was von einer k-Register-Maschine berechnet werden kann, kann auch von einer Turingmaschine berechnet werden.

"Satz:" Alles, was von einer Turingmaschine berechnet werden kann, das kann auch von einer 3-Register-Maschine berechnet werden.

Turingmaschinen haben genau die gleiche Rechenkraft wie **Registermaschinen.**

* Turingmaschinen
  (1-Band, k-Band, deterministisch, nicht-deterministisch)
* Registermaschinen
* Grammatiken
* λ–Kalkül
* Markov-Maschinen

....

Alle bekannten starken Rechenmechanismen haben die gleiche Rechenkraft

Church-Turing These:

"Alles, was sich überhaupt berechnen lässt, lässt sich von einer Turingmaschine berechnen."

Achtung: Dies ist nicht beweisbar, da "überhaupt berechnen" kein formaler Begriff ist.

Church-Turing These:

"Alles, was sich überhaupt berechnen lässt, lässt sich von einer Turingmaschine berechnen."

Achtung: Dies ist nicht beweisbar, da "überhaupt berechnen" kein formaler Begriff ist.

Church-Turing These:

"Alles, was von einer Turingmaschine nicht berechnet werden kann, lässt sich **überhaupt** nicht berechnen."

partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ **berechenbar :**

Es gibt Turing Maschine M, die für jedes $x \in \Sigma^*$,
bei Eingabe x
mit Bandinhalt $f(x) \in \Gamma^*$ stoppt, falls $f(x)$ definiert ist,
und nicht stoppt, falls $f(x)$ nicht definiert ist.

Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ **"überall berechenbar"**

$f(x)$ für jedes $x \in \Sigma^*$, definiert, und f berechenbar.

Anmerkung: $f : A \to B$ berechenbar, wenn A und B jeweils als Strings kodiert werden können, sodass die entsprechende Funktion über den Strings berechenbar ist.

Die folgenden sind äquivalent für $A \subset \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit $L(M) = A$
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist rekursiv aufzählbar
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer überall berechenbaren Funktion

$A \subset \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, wenn die positive charakteristische Funktion von A berechenbar ist.

$$\chi_A^+ : \Sigma^* \to \{0,1\} : \quad \chi_A^+(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \text{undef} & x \notin A \end{cases}$$

Die folgenden sind äquivalent für $A \subset \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit L(M) = A
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist rekursiv aufzählbar
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer überall berechenbaren Funktion

$A \subset \Sigma^*$ heißt **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine überall berechenbare Funktion $F : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ gibt , sodass

$A = \{ F(0), F(1), F(2) , \cdots \} = \{ F(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$

Die Funktion F "zählt die Menge A auf"

Die folgenden sind äquivalent für $A \subset \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit L(M) = A
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist rekursiv aufzählbar
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer überall berechenbaren Funktion