Reduktionen

Def.: Man sagt
"Sprache $A \subset \Sigma^*$ reduziert sich auf Sprache $B \subset \Gamma^*$"
"A ist leichter als B"
und schreibt
$A \preceq B$,
wenn es eine überall berechenbare Funktion $F: \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt,
sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt
$$x \in A \Leftrightarrow F(x) \in B$$

Satz: Wenn $A \preceq B$ dann gilt:
(i) B entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar
(ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow$ B nicht entscheidbar

Satz: Wenn $A \preceq B$ dann gilt:
(i) B entscheidbar $\Rightarrow$ A entscheidbar
(ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow$ B nicht entscheidbar

Anwendung: UNIV ist nicht entscheidbar, denn
$SAM \preceq UNIV$,und SAM nicht entscheidbar.

$$SAM = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \in L(M_w) \}$$
$$UNIV = \{ w\$x \in \{0,1\}^*\$\{0,1\}^* \mid decod(x) \in L(M_w) \}$$

$w \overset{F}{\mapsto} w\$cod(w)$ $\qquad$ $w \in SAM \Leftrightarrow w\$cod(w) \in UNIV$

u beliebiger, fester String

$$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

u beliebiger, fester String

$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

Beweis: $UNIV \preceq ACC_u$ (und UNIV ist nicht entscheidbar)

Reduktionsfunktion: $w\$x$ wird umgewandelt in Beschreibung einer TM $Z_{w,x}$

$Z_{w,x}$: Eingabe y

1. Lasse M_w mit Eingabe $decod(x)$ laufen.
2. If $y=u$ then akzeptiere, sonst divergiere

u beliebiger, fester String

$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

Beweis: $UNIV \preceq ACC_u$ (und UNIV ist nicht entscheidbar)

Reduktionsfunktion: $w\$x$ wird umgewandelt in Beschreibung einer TM $Z_{w,x}$

$Z_{w,x}$: Eingabe y

1. Lasse M_w mit Eingabe $decod(x)$ laufen.
2. If $y=u$ then akzeptiere, sonst divergiere

$w\$x \in UNIV \Rightarrow M_w$ akzeptiert $decod(x) \Rightarrow Z_{w,x}$ akzeptiert $u \Rightarrow cod(Z_{w,x}) \in ACC_u$

u beliebiger, fester String

$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

Beweis: $UNIV \preceq ACC_u$ (und UNIV ist nicht entscheidbar)

Reduktionsfunktion: $w\$x$ wird umgewandelt in Beschreibung einer TM $Z_{w,x}$

$Z_{w,x}$: Eingabe y

1. Lasse M_w mit Eingabe $decod(x)$ laufen.
2. If $y=u$ then akzeptiere, sonst divergiere

$w\$x \in UNIV \Rightarrow M_w$ akzeptiert $decod(x) \Rightarrow Z_{w,x}$ akzeptiert $u \Rightarrow cod(Z_{w,x}) \in ACC_u$

$w\$x \notin UNIV \Rightarrow M_w$ akzept. nicht $decod(x) \Rightarrow Z_{w,x}$ akzept. u nicht $\Rightarrow cod(Z_{w,x}) \notin ACC_u$

Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

ist nicht entscheidbar.

Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

ist nicht entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Beispiele:

$\{ w \mid \varepsilon \in L(M_w) \}$

$\{ w \mid L(M_w) = \emptyset \}$

$\{ w \mid L(M_w)$ ist endlich $\}$

$\{ w \mid L(M_w)$ ist kontextfrei $\}$

alle nicht entscheidbar.

Satz von Rice:

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$ ist **nicht** entscheidbar.

Beweis: o.B.d.A. sei $\emptyset \notin \mathcal{S}$ sowie
$L \in \mathcal{S}$ und M eine TM mit $L(M) = L$

Wollen zeigen: $UNIV \preceq C(\mathcal{S})$

Für $w\$x$ beschreibe $f(w\$x)$ folgende TM N:

Eingabe y
1. Lasse M_w auf x laufen
2. Lasse M auf y laufen

Wenn M_w das x akzeptiert, dann verhält sich N genauso wie M, also $f(w\$x) \in C(\mathcal{S})$

Wenn M_w das x nicht akzeptiert, dann akzeptiert N nichts, also die leere Sprache $\emptyset$, also gilt $f(w\$x) \notin C(\mathcal{S})$