Post‘sche Korrespondenzproblem

Reservoir von k Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich oben und <u>unten</u> das gleiche Wort ergibt ?

1	011	10	011
101	11	00	11

Post‘sche Korrespondenzproblem PCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1,\cdots,k\}^*$ mit $X[I] = Y[I]$

$I = (i_1,i_2,\cdots,i_n)$

$X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$

$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Beweis:

UNIV $\preceq$ WORT $\preceq$ MPCP $\preceq$ PCP,

also

UNIV $\preceq$ PCP .

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

Modifiziertes Post‘sche Korrespondenzproblem $MPCP_\Sigma$

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_k,y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1,\cdots,k\}^*$ mit $X[I] = Y[I]$

und $i_1 = 1$

$I = (i_1,i_2,\cdots,i_n)$

$X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$

$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$

Beh: $MPCP_\Sigma \preceq PCP_{\Sigma \cup \{\#,\$\}}$

Beh: $MPCP_\Sigma \preceq PCP_{\Sigma \cup \{\#,\$\}}$

Beweis:

$(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$

Beh: $MPCP_\Sigma \preceq PCP_{\Sigma \cup \{\#,\$\}}$

Beweis:

$(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))) \quad \rightarrow \quad (k+2, ((\overline{x}_1,\grave{y}_1), (\acute{x}_1,\grave{y}_1),\cdots, (\acute{x}_k,\grave{y}_k), (\$,\#\$)))$

Beh: $MPCP_\Sigma \preceq PCP_{\Sigma \cup \{\#,\$\}}$

Beweis:

$(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))) \quad \rightarrow \quad (k+2, ((\overline{x}_1,\grave{y}_1), (\acute{x}_1,\grave{y}_1),\cdots, (\acute{x}_k,\grave{y}_k), (\$,\#\$)))$

$a = a_1a_2\cdots a_m$

$\overline{a} = \#a_1\#a_2\#\cdots\#a_m\#$

$\acute{a} = \ \ a_1\#a_2\#\cdots\#a_m\#$

$\grave{a} = \#a_1\#a_2\#\cdots\#a_m$

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

WORT = { cod(G)\$cod(w) | $w \in L(G)$ }

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

WORT = { cod(G)\$cod(w) | $w \in L(G)$ }

Beh: UNIV $\preceq$ WORT

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

WORT = { cod(G)\$cod(w) | $w \in L(G)$ }

Beh: UNIV $\preceq$ WORT

Beweis schon bei Äquivalenz von TM und Grammatiken gegeben.

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w, baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w, baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w, baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$€w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S \quad \$$$

$$€ \quad w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S\$$$

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

€w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow$	$\cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S	\$
€	w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow \cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S\$	

0	0	1	A	0	0	1	B	1	1
0	0	1	A	0	0	1	A0	1	1

Bei Produktion
$B \rightarrow A0$
in P

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

€w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow$	$\cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S	\$
€	w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow \cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S\$	

Grammatik $G = (\{a_1,\cdots,a_s\} ,\ \{B_1,\cdots,B_t\} ,\ B_1,\ \{\alpha_1\rightarrow\beta_1, \cdots , \alpha_r\rightarrow\beta_r\})$, Wort w

Beh: WORT $\preceq$ MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

€w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow$	$\cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S	\$
€	w $\Leftarrow$	U_m $\Leftarrow$	U_{m-1} $\Leftarrow$	U_{m-2} $\Leftarrow \cdots$	$\Leftarrow U_2$	$\Leftarrow U_1$	$\Leftarrow$ S\$	

Grammatik $G = (\{a_1,\cdots,a_s\} ,\ \{B_1,\cdots,B_t\} ,\ B_1,\ \{\alpha_1\rightarrow\beta_1, \cdots , \alpha_r\rightarrow\beta_r\})$, Wort w

MPCP

€w$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	a_1	$\cdots$	a_s	B_1	$\cdots$	B_t	α_1	$\cdots$	α_r	\$
€	$\Leftarrow$	a_1		a_s	B_1		B_t	β_1		β_r	$\Leftarrow$S\$

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Beweis:

UNIV $\preceq$ WORT $\preceq$ MPCP $\preceq$ PCP,

also

UNIV $\preceq$ PCP .

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$
$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$
$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

S_X kontextfrei, denn generiert durch Grammatik mit Regeln

$S \rightarrow i\ S\ x_i \qquad 1\leq i\leq k$
$S \rightarrow i\ \$\ x_i \qquad 1\leq i\leq k$

analog S_Y kontextfrei.
S_X und S_Y sind sogar **deterministisch** kontextfrei.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$
$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$

$X[(i_1,\cdots,i_m)] = x_{i_1}\cdots x_{i_m}$

$S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ bedeutet es gibt ein $I\in\{1,\cdots,k\}^+$ mit

$I^R\$X[I] = I^R\$Y[I]$, also $X[I] = Y[I]$,

also entscheiden, ob $S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ würde das PCP lösen.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2)$ *ist endlich*? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$
$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J\in\{1,\cdots,k\}^+ \}$

PCP hat keine Lösung $\Rightarrow$ $S_X \cap S_Y = \emptyset$, also $S_X \cap S_Y$ endlich

PCP hat Lösung I $\Rightarrow$ I^n ist Lösung für jedes $n>0$
$\Rightarrow$ $(I^n)^R\$X[I^n] = (I^n)^R\$Y[I^n]$ jedes $n>0$
$\Rightarrow$ $S_X \cap S_Y$ ist **nicht** endlich.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \subset L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X

G_2 kontextfreie Grammatik für $\overline{S_Y}$

(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)

$$\mathbf{L(G_1) \subset L(G_2)} \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\textbf{PCP unlösbar}}_{\textit{unentscheidbar}}$$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) = L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R\$X[I] \mid I \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R\$Y[J] \mid J \in \{1,\cdots,k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X

G_2 kontextfreie Grammatik für $\overline{S_Y}$

(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)

G kontextfreie Grammatik für $S_X \cup \overline{S_Y}$

$$\mathbf{L(G_2) = L(G)} \Leftrightarrow \mathbf{L(G_1) \subset L(G_2)} \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\textbf{PCP unlösbar}}_{\textit{unentscheidbar}}$$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2)$ *ist kontextfrei*? ist unentscheidbar.

Beweis: $(\, k\, , ((x_1,y_1),\cdots,(x_k,y_k))\,)$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $L_X = \{\ I^R\#K\$K^R\#X[I]\ |\ I,K \in \{1,\cdots,k\}^+\ \}$
$S_Y = \{\ J^R\#J\$H^R\#Y[H]\ |\ J,H \in \{1,\cdots,k\}^+\ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für L_X
G_2 kontextfreie Grammatik für L_Y

PCP unlösbar $\Rightarrow$ $L_X \cap L_Y = \emptyset$ $\Rightarrow$ $L_X \cap L_Y$ **ist kontextfrei**

PCP lösbar $\Rightarrow$ $L_X \cap L_Y$ **enthält Worte der Form** $(I^n)^R\#I^n\$(I^n)^R\#X[I^n]$
für alle n>0
$\Rightarrow$ $L_X \cap L_Y$ **ist nicht kontextfrei**