

## Post'sche Korrespondenzproblem

Reservoir von  $k$  Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich **oben** und **unten** das gleiche Wort ergibt?

1	011	10	011
101	11	00	11

13.1.2017

1

## Post'sche Korrespondenzproblem $PCP_{\Sigma}$

Gegeben:  $k \in \mathbb{N}$ ,  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es  $I \in \{1, \dots, k\}^*$  mit  $X[I] = Y[I]$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$$

13.1.2017

2

**Satz:** PCP ist nicht entscheidbar.

**Beweis:**

$$UNIV \preceq WORT \preceq MPCP \preceq PCP,$$

also

$$UNIV \preceq PCP.$$

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

13.1.2017

3

## Modifiziertes Post'sche Korrespondenzproblem $MPCP_{\Sigma}$

Gegeben:  $k \in \mathbb{N}$ ,  $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es  $I \in \{1, \dots, k\}^*$  mit  $X[I] = Y[I]$

**und  $i_1 = 1$**

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_n}$$

13.1.2017

4

**Beh:**  $\text{MPCP}_\Sigma \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

13.1.2017

5

**Beh:**  $\text{MPCP}_\Sigma \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

$(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$

13.1.2017

6

**Beh:**  $\text{MPCP}_\Sigma \lhd \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

$(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))) \rightarrow (k+2, ((\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\acute{x}_1, \acute{y}_1), \dots, (\grave{x}_k, \grave{y}_k), (\$, \#)))$

13.1.2017

7

**Beh:**  $\text{MPCP}_\Sigma \lhd \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

$(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))) \rightarrow (k+2, ((\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\acute{x}_1, \acute{y}_1), \dots, (\grave{x}_k, \grave{y}_k), (\$, \#)))$

$$a = a_1 a_2 \dots a_m$$

$$\bar{a} = \# a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m \#$$

$$\acute{a} = a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m \#$$

$$\grave{a} = \# a_1 \# a_2 \# \dots \# a_m$$

13.1.2017

8

**WORT: Das Wortproblem****Gegeben:** Eine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$ **Frage:** Ist  $w \in L(G)$ ? Also, wird  $w$  von  $G$  generiert?**WORT: Das Wortproblem****Gegeben:** Eine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$ **Frage:** Ist  $w \in L(G)$ ? Also, wird  $w$  von  $G$  generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G)\text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

**WORT: Das Wortproblem****Gegeben:** Eine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$ **Frage:** Ist  $w \in L(G)$ ? Also, wird  $w$  von  $G$  generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G)\text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

**Beh:**  $\text{UNIV} \preceq \text{WORT}$ **WORT: Das Wortproblem****Gegeben:** Eine Grammatik  $G = (\Sigma, V, S, P)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$ **Frage:** Ist  $w \in L(G)$ ? Also, wird  $w$  von  $G$  generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G)\text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

**Beh:**  $\text{UNIV} \preceq \text{WORT}$ 

Beweis schon bei Äquivalenz von TM und Grammatiken gegeben.

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

13.1.2017

13

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ ,  
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.

$$w \leftarrow U_m \leftarrow U_{m-1} \leftarrow U_{m-2} \leftarrow \dots \leftarrow U_2 \leftarrow U_1 \leftarrow S$$

13.1.2017

14

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ ,  
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.

$$w \leftarrow U_m \leftarrow U_{m-1} \leftarrow U_{m-2} \leftarrow \dots \leftarrow U_2 \leftarrow U_1 \leftarrow S$$

$$w \leftarrow U_m \leftarrow U_{m-1} \leftarrow U_{m-2} \leftarrow \dots \leftarrow U_2 \leftarrow U_1 \leftarrow S$$

13.1.2017

15

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ ,  
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.

$$\epsilon w \leftarrow U_m \leftarrow U_{m-1} \leftarrow U_{m-2} \leftarrow \dots \leftarrow U_2 \leftarrow U_1 \leftarrow S \quad \$$$

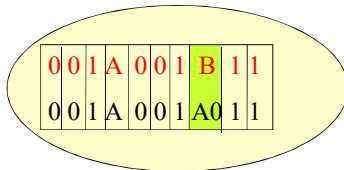
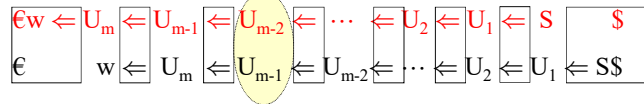
$$\epsilon \quad w \leftarrow U_m \leftarrow U_{m-1} \leftarrow U_{m-2} \leftarrow \dots \leftarrow U_2 \leftarrow U_1 \leftarrow S\$$$

13.1.2017

16

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

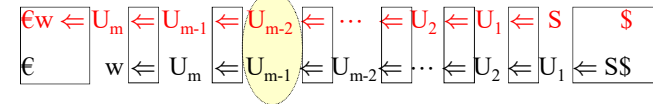
Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ , baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.



Bei Produktion  $B \rightarrow A0$  in  $P$

**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

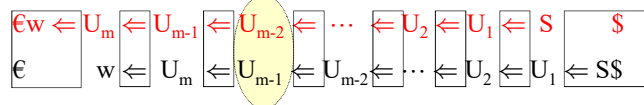
Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ , baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.



Grammatik  $G = (\{a_1, \dots, a_s\}, \{B_1, \dots, B_t\}, B_1, \{\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \dots, \alpha_r \rightarrow \beta_r\})$ , Wort  $w$

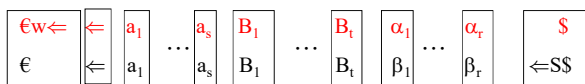
**Beh:** WORT  $\preceq$  MPCP

Beweisidee: Gegeben Grammatik  $G=(\Sigma, V, S, P)$  und Wort  $w$ , baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation  $S \Rightarrow_G w$  darstellt.



Grammatik  $G = (\{a_1, \dots, a_s\}, \{B_1, \dots, B_t\}, B_1, \{\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \dots, \alpha_r \rightarrow \beta_r\})$ , Wort  $w$

**MPCP**



**Satz:** PCP ist nicht entscheidbar.

**Satz:** PCP ist nicht entscheidbar.

**Beweis:**

$\text{UNIV} \preceq \text{WORT} \preceq \text{MPCP} \preceq \text{PCP}$ ,

also

$\text{UNIV} \preceq \text{PCP}$ .

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

**Satz:** Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$

- 1) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?
- 2) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ?
- 4) Frage: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ?
- 5) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei ?

**Satz:** Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$

- 1) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?
- 2) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ?
- 4) Frage: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ?
- 5) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ? ist unentscheidbar.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[i_1, \dots, i_m] = x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[i_1, \dots, i_m] = x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

$S_X$  kontextfrei, denn generiert durch Grammatik mit Regeln

$$\begin{aligned} S &\rightarrow i S x_i & 1 \leq i \leq k \\ S &\rightarrow i \$ x_i & 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

analog  $S_Y$  kontextfrei.

$S_X$  und  $S_Y$  sind sogar **deterministisch** kontextfrei.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$ ? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[i_1, \dots, i_m] = x_{i_1} \dots x_{i_m}$$

$S_X \cap S_Y \neq \emptyset$  bedeutet es gibt ein  $I \in \{1, \dots, k\}^+$  mit

$$I^R \$ X[I] = I^R \$ Y[I], \text{ also } X[I] = Y[I],$$

also entscheiden, ob  $S_X \cap S_Y \neq \emptyset$  würde das PCP lösen.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

PCP hat keine Lösung  $\Rightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset$ , also  $S_X \cap S_Y$  endlich

PCP hat Lösung  $I \Rightarrow I^n$  ist Lösung für jedes  $n > 0$

$$\Rightarrow (I^n)^R \$ X[I^n] = (I^n)^R \$ Y[I^n] \text{ jedes } n > 0$$

$$\Rightarrow S_X \cap S_Y \text{ ist nicht endlich.}$$

**Satz:** Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$

- 1) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?
- 2) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ?
- 4) Frage: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ?
- 5) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X [I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y [J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$G_1$  kontextfreie Grammatik für  $S_X$

$G_2$  kontextfreie Grammatik für  $S_Y$

(geht, da  $S_Y$  deterministisch kontextfrei)

$L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\text{PCP unlösbar}}_{\text{unentscheidbar}}$

**Satz:** Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$

- 1) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?
- 2) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ?
- 4) Frage: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ?
- 5) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $S_X = \{ I^R \$ X [I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \$ Y [J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$G_1$  kontextfreie Grammatik für  $S_X$

$G_2$  kontextfreie Grammatik für  $S_Y$

(geht, da  $S_Y$  deterministisch kontextfrei)

$G$  kontextfreie Grammatik für  $S_X \cup S_Y$

$L(G_2) = L(G) \Leftrightarrow L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\text{PCP unlösbar}}_{\text{unentscheidbar}}$



**Satz:** Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$

- 1) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?
- 2) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt  $L(G_1) \subset L(G_2)$  ?
- 4) Frage: Gilt  $L(G_1) = L(G_2)$  ?
- 5) Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

**Beh.:** Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2)$  ist kontextfrei? ist unentscheidbar.

**Beweis:**  $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$  Instanz von PCP

Betrachte Sprachen  $L_X = \{ I^R \# K S K^R \# X [I] \mid I, K \in \{1, \dots, k\}^+ \}$   
 $S_Y = \{ J^R \# J S H^R \# Y [H] \mid J, H \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$G_1$  kontextfreie Grammatik für  $L_X$

$G_2$  kontextfreie Grammatik für  $L_Y$

PCP unlösbar  $\Rightarrow L_X \cap L_Y = \emptyset \Rightarrow L_X \cap L_Y$  ist kontextfrei

PCP lösbar  $\Rightarrow L_X \cap L_Y$  enthält Worte der Form  $(I^n)^R \# I^n S (I^n)^R \# X [I^n]$   
für alle  $n > 0$   
 $\Rightarrow L_X \cap L_Y$  ist nicht kontextfrei