Der Rekursionssatz

Ziel: Turingmaschinen sollen ihre eigene Kodierung in ihren Berechnungen verwenden können

Einfache Turingmaschine: ein Band
anfangs Eingabeband,
dann Arbeitsband,
am Schluss Ausgabeband

$\langle M \rangle$ Kodierung von TM M

Komposition von TMen: $\langle A \rangle \# \langle B \rangle \# \langle C \rangle \ldots$
Turingmaschine A läuft mit Eingabe x, hinterlässt y;
dann läuft TM B mit Eingabe y, hinterlässt z;
dann läuft TM C mit Eingabe z, usf.

Beh.: Es gibt eine TM Q, die bei Eingabe $w \in \Sigma^*$
die Kodierung einer TM $\langle PRINT_w \rangle$ produziert,
die folgendes Eingabe/Ausgabe-Verhalten hat:
Eingabe x, Ausgabe w

B TM mit folgendem Verhalten: $z \xrightarrow{B} \langle PRINT_z \rangle \# z$

A TM $PRINT_{\langle B \rangle}$, also Verhalten: $x \xrightarrow{A} \langle B \rangle$

$\langle A \rangle \# \langle B \rangle$, TM zuerst A dann B hat folgendes Verhalten:

$$x \xrightarrow{A} \langle B \rangle \xrightarrow{B} \underbrace{\langle PRINT_{\langle B \rangle} \rangle}_{A} \# \langle B \rangle$$

Also $\langle A \rangle \# \langle B \rangle$ ignoriert (und löscht) die Eingabe und produziert **seine eigene Beschreibung**

Rekursionssatz $t: \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ von TM T berechnet
(Eingabe hat Form $u\$v$)
$\exists$ TM R, die die Funktion $r: \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit
$$r(x) = t(\langle R \rangle, x)$$
berechnet.

Man darf also annehmen, dass eine TM (oder auch ein Programm) auf seine eigene Beschreibung Zugriff hat.

Rekursionssatz $t: \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ von TM T berechnet
(Eingabe hat Form $u\$v$)
$\exists$ TM R, die die Funktion $r: \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit
$$r(x) = t(\langle R \rangle, x)$$
berechnet.

Sei T TM mit $u\$v \xrightarrow{T} t(u,v)$

$PREPRINT_z$ TM mit $x \xrightarrow{PREPRINT_z} zx$

B TM mit $z\$w \xrightarrow{B} \langle PREPRINT_{z\$} \rangle \# z\$w$

A TM $PREPRINT_{\langle B \rangle \# \langle T \rangle \$}$ $x \xrightarrow{A} \langle B \rangle \# \langle T \rangle \$x$

Sei T TM mit $\quad u\$v \xrightarrow{T} t(u,v)$

$PREPRINT_z$ TM mit $\quad x \xrightarrow{PREPRINT_z} zx$

B TM mit $\quad z\$w \xrightarrow{B} \langle PREPRINT_{z\$} \rangle\#z\$w$

A TM $PREPRINT_{\langle B\rangle\#\langle T\rangle\$}$ $\quad x \xrightarrow{A} \langle B \rangle\#\langle T \rangle\$x$

Betrachte TM R kodiert durch $\langle A \rangle\#\langle B \rangle\#\langle T \rangle$

$$x \xrightarrow{A} \langle B \rangle\#\langle T \rangle\$\, x \xrightarrow{B} \underbrace{\langle PREPRINT_{\langle B\rangle\#\langle T\rangle\,\$} \rangle}_{A}\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle\$x$$

$$\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle\ \$\ x \xrightarrow{T} t(\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle\ ,\ x\ )$$

Betrachte TM R kodiert durch $\langle A \rangle\#\langle B \rangle\#\langle T \rangle$

$$x \xrightarrow{A} \langle B \rangle\#\langle T \rangle\$\, x \xrightarrow{B} \underbrace{\langle PREPRINT_{\langle B\rangle\#\langle T\rangle\,\$} \rangle}_{A}\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle\$x$$

$$\underbrace{\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle}_{\langle R\rangle}\ \$\ x \xrightarrow{T} t(\ \underbrace{\langle A\rangle\#\langle B\rangle\#\langle T\rangle}_{\langle R\rangle}\ ,\ x\ )$$

Rekursionssatz $t:\ \Sigma^*\times\Sigma^* \to \Sigma^*$ von TM T berechnet
(Eingabe hat Form $u\$v$)
$\exists$ TM R, die die Funktion $r:\ \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$r(x) = t(\ \langle R \rangle\ ,\ x\ )$$

berechnet.

Betrachte Sprache MIN-TM = $\{\ u\in\{0,1\}^*\ |\ \forall\ v\in\{0,1\}^* : L(M_u)=L(M_v) \Rightarrow |v|\geq|u|\ \}$

$u\in$MIN-TM bedeutet u ist eine ***"kürzeste"*** TM-Kodierung für die Sprache $L=L(M_u)$

Betrachte Sprache MIN-TM = $\{\ u\in\{0,1\}^*\ |\ \forall\ v\in\{0,1\}^* : L(M_u)=L(M_v) \Rightarrow |v|\geq|u|\ \}$

$u\in$MIN-TM bedeutet u ist eine ***"kürzeste"*** TM-Kodierung für die Sprache $L=L(M_u)$

Satz: MIN-TM ist **nicht** entscheidbar.

Betrachte Sprache MIN-TM = $\{ u\in\{0,1\}^* \mid \forall v\in \{0,1\}^* : L(M_u)=L(M_v) \Rightarrow |v|\geq|u| \}$

$u\in$MIN-TM bedeutet u ist eine ***"kürzeste"*** TM-Kodierung für die Sprache $L=L(M_u)$

Satz: MIN-TM ist **nicht** entscheidbar.

Beweis: Nimm das Gegenteil an, und es sei **E** eine TM, die MIN-TM entscheidet.

Betrachte Sprache MIN-TM = $\{ u\in\{0,1\}^* \mid \forall v\in \{0,1\}^* : L(M_u)=L(M_v) \Rightarrow |v|\geq|u| \}$

$u\in$MIN-TM bedeutet u ist eine ***"kürzeste"*** TM-Kodierung für die Sprache $L=L(M_u)$

Satz: MIN-TM ist **nicht** entscheidbar.

Beweis: Nimm das Gegenteil an, und es sei **E** eine TM, die MIN-TM entscheidet.

Betrachte TM **A**, die mit Eingabe x Folgendes macht:

1. Bestimme $w = \langle A\rangle$ (möglich wegen des Rekursionssatzes)
2. for $k = |w|+1$ to ∞ do
   for each $u\in \{0,1\}^k$ do teste mit E, ob $u\in$MIN-TM
   wenn ja, gehe zu 3.
3. Simuliere M_u auf x

Betrachte Sprache MIN-TM = $\{ u\in\{0,1\}^* \mid \forall v\in \{0,1\}^* : L(M_u)=L(M_v) \Rightarrow |v|\geq|u| \}$

$u\in$MIN-TM bedeutet u ist eine ***"kürzeste"*** TM-Kodierung für die Sprache $L=L(M_u)$

Satz: MIN-TM ist **nicht** entscheidbar.

Beweis: Nimm das Gegenteil an, und es sei **E** eine TM, die MIN-TM entscheidet.

Betrachte TM **A**, die mit Eingabe x Folgendes macht:

1. Bestimme $w = \langle A\rangle$ (möglich wegen des Rekursionssatzes)
2. for $k = |w|+1$ to ∞ do
   for each $u\in \{0,1\}^k$ do teste mit E, ob $u\in$MIN-TM
   wenn ja, gehe zu 3.
3. Simuliere M_u auf x

|MIN-TM| = ∞, aber Schritt 2 lässt nur endlich viele u's aus. D.h.Schritt 3 wird erreicht.

$L(A) = L(M_u)$, aber $|\langle A\rangle| < |u|$, also Widerspruch dass $u\in$MIN-TM.

Fixpunktsatz:
Sei $t : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ eine überall berechenbare Funktion

Dann gibt es ein $u\in\{0,1\}^*$ mit $L(M_u) = L(M_{t(u)})$.

Fixpunktsatz:
Sei $t : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ eine überall berechenbare Funktion

Dann gibt es ein $u \in \{0,1\}^*$ mit $L(M_u) = L(M_{t(u)})$.

Beweis: Sei F eine TM mir folgendem Verhalten:

Eingabe x
1. Sei u die Kodierung von F (möglich nach Rekursionssatz)
2. Berechne $w = t(u)$
3. Simuliere M_w auf Eingabe x

Dann gilt: F verhält sich genau wie M_w, also $L(F) = L(M_w)$

Aber $F = M_u$ und $w = t(u)$

also $L(M_u) = L(M_{t(u)})$